

大连理工大学本科毕业设计（论文）

托卡马克装置的近似磁场位形的数值研究

The Numerical Study on Approximate Magnetic Field Configuration of Tokamak Device

学院（系）： 物理系
专 业： 电子科学与技术
学 生 姓 名： 屈超
学 号： 201521180
指 导 教 师： 刘金远
评 阅 教 师： 王丰
完 成 日 期： 2019-6-12

大连理工大学

Dalian University of Technology

原创性声明

本人郑重声明：本人所呈交的毕业设计（论文），是在指导老师的指导下独立进行研究所取得的成果。毕业设计（论文）中凡引用他人已经发表或未发表的成果、数据、观点等，均已明确注明出处。除文中已经注明引用的内容外，不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究成果做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本声明的法律责任由本人承担。

作者签名：

日期：

关于使用授权的声明

本人在指导老师指导下所完成的毕业设计（论文）及相关的资料（包括图纸、试验记录、原始数据、实物照片、图片、录音带、设计手稿等），知识产权归属大连理工大学。本人完全了解大连理工大学有关保存、使用毕业设计（论文）的规定，本人授权大连理工大学可以将本毕业设计（论文）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用任何复制手段保存和汇编本毕业设计（论文）。如果发表相关成果，一定征得指导教师同意，且第一署名单位为大连理工大学。本人离校后使用毕业毕业设计（论文）或与该论文直接相关的学术论文或成果时，第一署名单位仍然为大连理工大学。

论文作者签名：

日期：

指导老师签名：

日期：

摘 要

为了能够将聚变能加以利用，必须实现可控热核聚变，而可控热核聚变需要解决的基本问题就是等离子体约束。在工程上实际可行也就磁约束和惯性约束，其中又以磁约束研究的最成功。磁约束聚变装置的类型有很多，迄今为止，对托卡马克装置研究的最多。本文就托卡马克装置的磁场位形做了近似的分析。

首先是对等离子体的基本概念和应用、托卡马克装置的主要结构以及磁体系统和数值计算工具进行了简要的介绍。然后根据麦克斯韦方程组推导毕奥萨法尔定律，在此基础上，推导出单电流环在空间中产生的磁场分布，并对其进行了数值模拟。接着根据单环得到的结果，推广到磁镜在空间中产生的磁场分布，模拟出磁镜场的磁场位形，并且利用龙格-库塔法模拟出带电粒子在磁镜场中的运动轨迹。其次，不考虑托卡马克装置中等离子体的各种不稳定性，简单的把由等离子体电流产生的极向磁场看成是粗电流环产生的结果进行分析，利用单电流环得到的结果，对半径和角度积分便可得到粗电流环的磁场位形。最后，近似认为托卡马克装置的磁场位形是由环向场线圈产生的环向场和等离子体电流产生的极向场叠加，计算出了安全因子的分布，并且利用 Boris 方法模拟出氢离子在近似磁场位形下的运动轨迹。

关键词：托卡马克；数值模拟；磁场位形；粒子运动

The Numerical Study on Approximate Magnetic Field Configuration of Tokamak Device

Abstract

In order to make use of fusion energy, controllable thermonuclear fusion must be realized., and the basic problem that needs to be solved by controlled thermonuclear fusion is plasma confinement. In engineering, it is practically feasible to have magnetic constraints and inertia constraints, among which magnetic constraints are the most successful. There are many types of magnetic confinement fusion devices. So far, the most studied is the tokamak device. This paper makes an approximate analysis of the magnetic field configuration of the tokamak device.

The first is a brief introduction to the basic concepts and applications of plasma, the main structure of the tokamak device, and the magnet system and numerical calculation tools. Then the Biosal's law is derived according to Maxwell's equations. On this basis, the magnetic field distribution generated by the single coil in space is derived and numerically simulated. Then, according to the results obtained by the single coil, derived the magnetic field distribution generated by the magnetic mirror in space, the magnetic field configuration of the magnetic mirror field is simulated, and the trajectory of the charged particles in the magnetic mirror field is simulated by the Runge-Kutta method. Secondly, regardless of the various instability of the plasma in the Tokamak device, the polar magnetic field generated by the plasma current is simply regarded as the result of the generation of the coarse current coil, using the results obtained with a single coil, the magnetic field configuration of the coarse current coil can be obtained by integrating the radius and angle. Finally, it is approximated that the magnetic field configuration of the tokamak device is a superposition of the toroidal field generated by the toroidal field coil and poloidal field generated by the plasma current, the distribution of safety factors is calculated, and the Boris method is used to simulate the trajectory of hydrogen ions in the approximate magnetic field configuration.

Key Words: Tokamak; Numerical Simulation; Magnetic Field Configuration; particle movement

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
1 文献综述.....	1
1.1 等离子体.....	1
1.2 托卡马克.....	2
1.2.1 托卡马克装置.....	2
1.2.2 环向磁体.....	4
1.2.3 极向磁体.....	5
1.2.4 放电程序.....	5
1.3 数值计算工具.....	7
2 单匝电流环的磁场位形.....	8
2.1 单匝电流环的磁场位形推导.....	8
2.2 单匝电流环的磁场位形模拟.....	13
3 磁镜.....	17
3.1 磁镜装置.....	17
3.2 磁镜的磁场位形.....	18
3.3 带电粒子在磁镜中的运动.....	21
4 粗电流环的磁场位形.....	29
4.1 环向场线圈的磁场位形.....	29
4.2 中心螺线管.....	30
4.3 粗电流环的磁场位形.....	30
5 近似托卡马克磁场位形分析.....	36
5.1 近似托卡马克磁场位形.....	36
5.2 带电粒子在托卡马克装置中的运动.....	37
结 论.....	42
参 考 文 献.....	43
附录 A 程序.....	45
修改记录.....	56
致 谢.....	57

1 文献综述

1.1 等离子体

物质通常有三态：固态、液态、气态。当把气体加热使其电子发生电离，满足一定条件后，物质就变成了等离子体。根据萨哈方程，处于热平衡的气体的电离量是

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 * 10^{15} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i} e^{-\frac{U_i}{KT}} \quad (1.1.1)$$

其中， n_i 是以电离原子的密度， n_n 是中性原子的密度， T 是气体的温度， K 是玻尔兹曼常量， U_i 是气体的电离能。对于室温下的普通空气 $n_i/n_n \approx 10^{-122}$ ，所以在地球上等离子体很少，而在温度达到近百万度的天体中，气体已经充分电离。在高温环境下，等离子体是物质的第四态，并且宇宙中的物质99.99%以等离子体状态存在。等离子体的定义是带电粒子和中性粒子组成的表现出集体行为的一种准中性气体^[1]。由于集体行为，等离子体并不顺从于外界的影响。等离子体必须满足的三个条件是：

$$\begin{aligned} \lambda_D &\ll L \\ N_D &\gg 1 \\ \omega\tau &> 1 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

即气体足够稠密，使德拜长度 λ_D 远远小与系统的尺度 L ， $N_D \gg 1$ 是等离子体通过集体行为来保持电中性的条件，也就是电子的热运动所具有的平均动能要比电子的平均势能大很多， $\omega\tau > 1$ 说明电子和电子之间的碰撞频率必须比电子和中性粒子之间的碰撞频率高得多，使得在等离子体的存在时间内经过多次碰撞而达到热力学平衡状态^[2]。等离子体能用 n 和 KT_e 两个参数来表征，在等离子体中常用能量单位 eV 来表示离子的温度，并有 $1eV \approx 11600k$ 。

对等离子体可的研究可分为宏观描述和统计描述，宏观描述是流体描述，它包括磁流体力学和双流体力学。磁流体力学将等离子体视为受到磁场作用的流体，同时考虑流体的流动使磁场产生的变化。双流体力学把不同种类的带电粒子分别用不同的导电流体来描述。统计描述是以各种粒子的速度分布函数的时间演化方程为手段的理论描述。此外，可以直接对大量带电粒子的集合轨道描述，先忽略粒子间的相互作用，并且不考虑带电粒子运动对电磁场的影响，这样多体问题就化为单粒子在磁场中的运动，这就是单粒子描述^[3]。

根据等离子体中带电粒子温度的不同，可分为低温等离子体和高温等离子体。低温等离子体是指在实验室和工业设备中通过气体放电或高温燃烧而产生的温度低于几十

万度的部分电离气体^[4]。低温等离子体技术在国民经济各领域中又广泛的应用，在微电子加工与光电子集成电路、等离子体聚合与表面改性、新型薄膜材料、等离子体灭菌、制备有机和无机纳米克利等技术有独特的优越性^[5,6,7]。目前等离子体物理学的大多数活跃使使为了解决受控热核聚变问题。聚变等离子体是完全电离气体，它的行为主要收到长程的电场和磁场支配。在高温、低密度的状态下，电子和离子之间很少发生库伦碰撞，因此对电流的阻碍作用非常微弱，即聚变等离子体拥有很高的电导率。

1.2 托卡马克

1.2.1 托卡马克装置

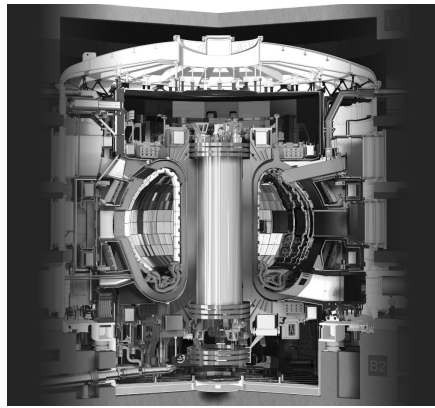


图 1.1 ITER 截面图

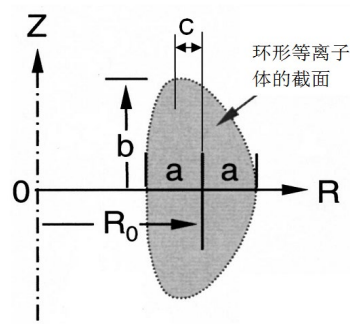


图 1.2 托卡马克等离子体的主要形状参数

托卡马克(Tokamak)是由苏联科学家阿齐莫维奇(Artzimovich)提出来的，它的名字来源于环形(toroidal)、真空室(kamera)、磁(magnit)、线圈(kotushka)，由于具有环向等离子体电流，也称环流器。它是以一种环形磁容器，如图(1.1)所示，用来约束高温等离子体。装置的核心部分是产生等离子体的区域，在主流的装置上还有排除杂质

的偏滤器。围绕装置核心的部分是计算机外设、加料和排灰系统，对于超导装置还有制冷系统^[8]。在大型托卡马克装置中，等离子体截面实际是在垂直方向拉长的^[9]，如图(1.2)所示。我们可以用大半径、小半径、环径比、拉长比和三角形变来描述等离子体截面。大半径 R 是环截面中心到环圆心的距离，小半径 a 是环截面的半径，如果环截面非圆的话，则一般以赤道面（ $Z = 0$ 的平面）上环截面宽度的一半为小半径，环径比 $A = R_0/a$ ，即大半径与小半径之比，拉长比 $k = b/a$ ，用来衡量环截面椭圆形变（相对圆截面来说）的一个参数，三角形变 $\delta = c/a$ ，指环截面由水平对称的椭圆向不对称的三角形变化的程度。

在托卡马克装置设计中，最重要的工程几何参数是磁容器大半径 R_0 ，小半径 a/b ，环向磁感应强度 B_t 。一旦这几个参数确定下来，托卡马克装置中能产生多大的等离子体电流就被大体确定了。

目前，国外大的托卡马克装置有美国 TFTR、日本 JT-60U 和欧洲联合环(JET)。国内主要的托卡马克装置是中国环流器二号 A(HL-2A)、东方超环(EAST)^[10]和 J-TEXT 以及由欧盟、印度、日本、中国、俄罗斯、韩国和美国正在共同建造的 ITER^[11]。下表是国外主要大中型托卡马克装置参数

表 1.0.1 国外主要大中型托卡马克装置参数

装置名称	地点	大半径/m	小半径/m	环向磁场/T	等离子体电流/MA
JT-60U	JAERI	3.4	1.1	4.2	2.5
TFTR	Princeton	2.4	0.8	5.0	2.2
JET	Abingdon	3.0	1.25	3.5	5.0
DIIIID	GA	1.67	0.67	2.1	1.6
T-10	Kurchatov	1.5	0.37	4.5	0.68
Tore Supra	Cadarache	2.37	0.8	4.5	2.0
ASDEX-U	Garching	1.65	0.5	3.9	1.4
FTU	Frascati	0.93	0.3	8.0	1.3
TEXTTOR94	Julich	1.75	0.46	2.8	0.8
TCV	Lausanne	0.88	0.24	1.4	0.17

以及国内托卡马克装置主要参数

表 1.2 我国托卡马克装置主要参数

装置	大半径/m	小半径/m	环向磁场/T	电流/MA
HL-2A	1.65	0.4	2.8	0.48
EAST	1.85	0.45	3.5	1
J-TEXT	1.05	0.29	2.2	0.22

传统托卡马克装置都是脉冲式工作的，如果要实现利用托卡马克装置来进行发电，必须做到稳态运行，首先需要有持续的环形电流，其中一个方法是可采用高相速射频的方式^[12]。托卡马克的磁体系统主要由环向磁体系统和极向磁体系统组成，图（1.3）是托卡马克中的主要磁体构成

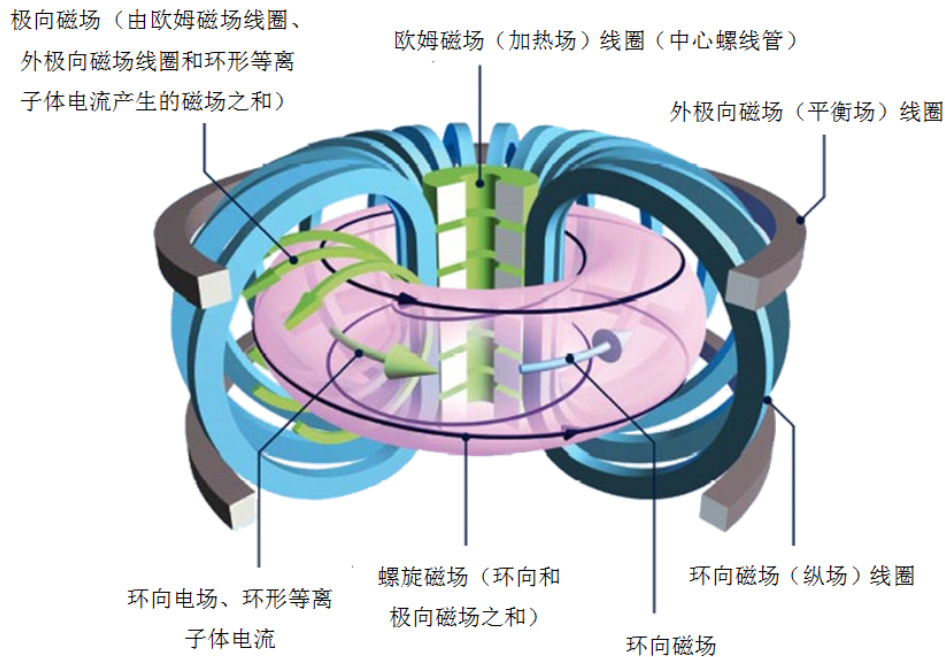


图 1.3 托卡马克中的磁场构成

1.2.2 环向磁体

环向磁体产生环向场用来约束等离子体，环向磁场要足够强，使带电粒子的回旋半径小于装置的尺寸，减少带电粒子撞到壁上的几率。环向磁体由多个分布在极向的线圈构成，线圈一般是多匝，以串联的方式连接使得杂散磁场最小。环向场线圈最初设计时是半径为 R 的圆，这种线圈制造虽然方便，但是受力情况不理想，在考虑了受力和实际等离子体截面等多方面因素后，一种D型线圈被设计了出来，目前先进的托卡马克装置都采用的是D型线圈。线圈与线圈之间有一定的间距，用于加料、排灰以及等离子体诊断^[13]。由于托卡马克装置需要强的环向磁场来约束等离子体，即环向磁场线圈中需要通入很高的电流，对于常规线圈来说，会产生大量焦耳热，不利用设备的长时间运行，最理想的是超导材料^[14]，因为超导材料没有电阻，可以长时间的维持环向磁场。

1.2.3 极向磁体

同等离子体电流走向一样，托卡马克极向磁体的电流走在环向。极向场由加热场和平衡场（成型场）组成，加热场是用来启动等离子体电流和进行欧姆加热，可由变压器产生，变压器有空芯和铁芯两种选择。平衡场是为了维持等离子体平衡，它由一组分布在等离子体区环内外侧电流相反的线圈组成。

由于变压器存在漏磁和安装、加工及其他过程中存在误差，会有杂散场产生，它会破坏环形封闭的磁力线，这是我们不希望看到的。因此有必要安装矫正场，它由一组垂直矫正场线圈和一组水平矫正场线圈组成。一般是先加环向场，然后是矫正场和加热场，击穿以后再加平衡场。

1.2.4 放电程序

以 ITER 为例简要说明托卡马克装置放电的一般步骤：

- (1) 启动环向场
- (2) 极向场反向磁化阶段：提供加倍的磁通变化，防止高电压破坏绝缘
- (3) 击穿阶段：极向场正向急剧磁化，提供高的环电压
- (4) 电流爬升阶段：磁化速度减弱，使等离子体电流达到预定值
- (5) 加热阶段：用电子回旋波加热等离子体，通入燃料
- (6) 燃烧阶段：辅助加热停止，聚变反应维持
- (7) 燃烧结束阶段：降低通入燃料的速率，极向场反向以降低等离子体电流
- (8) 电流结束阶段：停止通入燃料，进一步反向增加极向场使得等离子体电流降到零

图（1.4）为在 ITER 上预计的一种运行方案的主要参量波形图^[15]

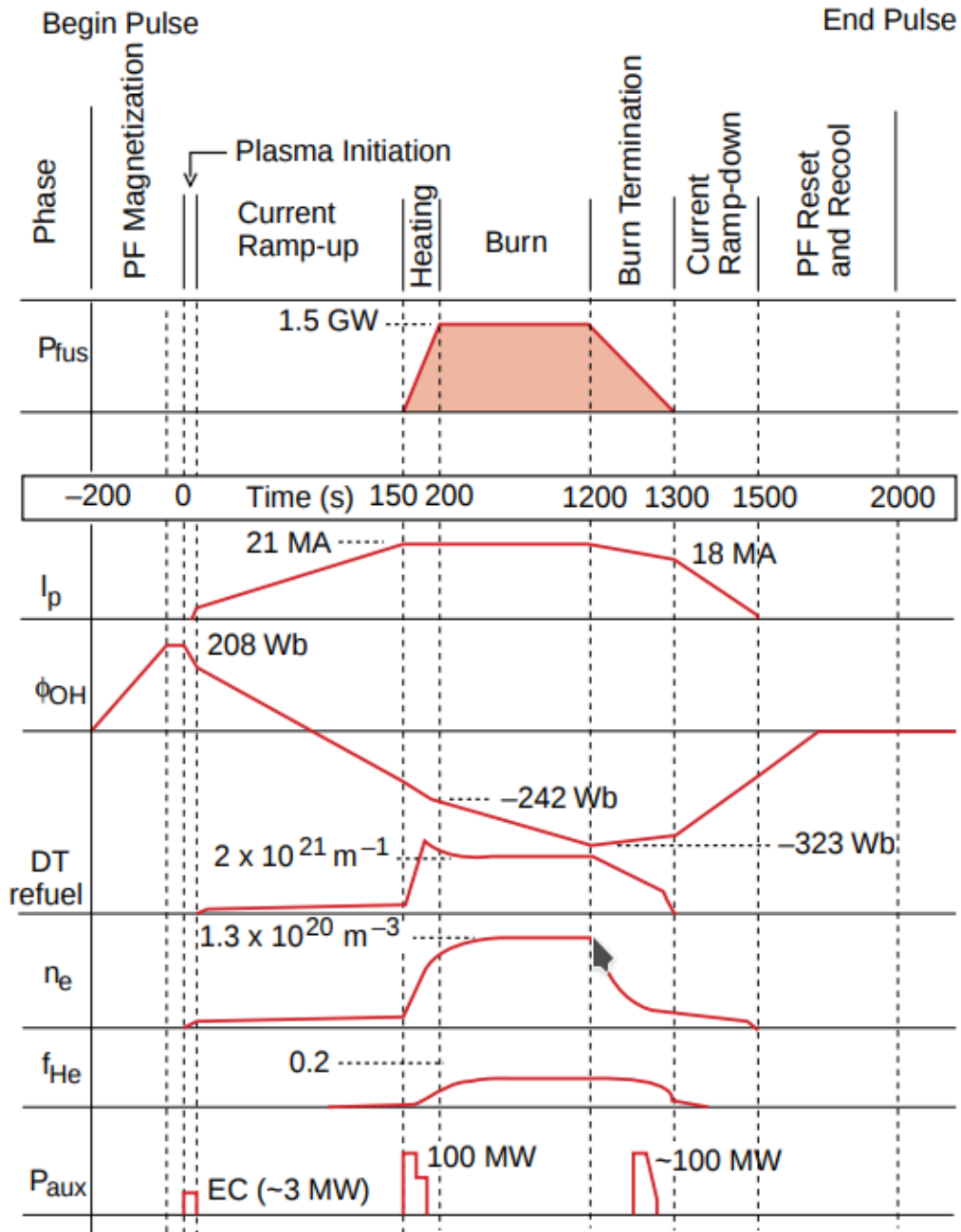


图 1.4 ITER 放电波形图

(P_{fus} 为聚变功率, I_p 为等离子体电流, ϕ_{OH} 为欧姆变压器磁通, $DT \ refuel$ 为DT燃料密度, n_e 为电子密度, f_{He} 为氦灰比例, P_{aux} 为辅助加热功率)

1.3 数值计算工具

第一个为了数值计算而开发出来的语言是 Fortran 语言，它是世界上最早出现的高级程序设计语言，经过几十年的发展，现任然在全世界广受欢迎，并且现在很多大型模拟软件的核心程序都是用 Fortran 语言编写。Fortran 语言采用同数学公式一样的表述方法，因此非常容易学习，写出来的程序也非常适合相关研究人员阅读。Fortran 语言语法严谨、执行效率很高，可以直接对矩阵和复数进行操作，并且已经积累了大量 Fortran 包，比如 IMSL、MKL、NAG、BLAS、LAPACK 等，这些 Fortran 包都已经非常成熟了并且还在不断更新。

MATLAB 是 MATtix LABoratory 的缩写，是美国 Mathworks 公司出品的商业数学软件，在全世界都广受反应，与 Mathematica，Maple 并称为三大数学软件。广泛应用于信号和图像处理、通信、控制系统设计、测量和测试、财务建模和分析，以及计算生物学等众多应用领域。基本数据单位是矩阵，其特点是简单易学，具有强大的矩阵计算和仿真能力。里面包含大量的工具箱，主要可分为功能性工具箱和学科性工具箱，学科性工具箱都是由该领域内学术水平很高的专家编写，使用这些工具箱能用很少的代码就解决复杂的问题，使研究人员不必过分关心某个算法的具体实现，能够更好的专注于自己要做的事，其自带的帮助文件也是非常强大的帮助文件^[16]。

MATLAB 语言是一种交互性的数学脚本语言，语法类似于 C/C++。支持逻辑、数值、文本、函数柄和异素数据容器在内的 15 种数据类型。每一种类型都定义为矩阵或阵列的形式^[17]。MATLAB 是商业付费软件，它也有一些替代工具如 octave 和 Python 等。octave 采用和 MATLAB 同样的语法格式，一般的 MATLAB 程序直接用 octave 便可以直接运行。

Python 是现在社区人数比较活跃的高级语言之一，它是一种解释性的语言，只需要一个解释器便可以运行 Python 程序，Python 注重代码的简洁的可读性。Python 语言的应用非常广泛，既可以用于网络应用程序又能用于科学计算等。如今大数据和人工智能更是推动了 Python 语言的发展。Python 流行的很重要的一个原因就是其有相当多的库，在科学计算领域常用的库是 NumPy、SciPy、Matplotlib 和 Pandas。Python 有两个版本：Python2 和 Python3，在设计 Python3 的时候没有考虑到向下兼容的问题，以致于 Python2 和 Python3 的代码不完全通用，实际上，随着 Python3 的流行，越来越多的库都已经有了 Python3 版本或者正在移植到 Python3 上。

2 单匝电流环的磁场位形

2.1 单匝电流环的磁场位形推导

一般情况下，麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

麦克斯韦方程揭示了电与磁之间普遍的关系：变化的电场能够产生磁场，变化的磁场能够产生电场。由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，根据矢量分析，则 \mathbf{B} 一定能写成 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，其中 \mathbf{A} 为磁场的矢势，其物理意义是它沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一界面的磁通量。在线性均匀介质有 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ，假设电场恒定，即电场是保守场，则有 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ ，将 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 带入到麦克斯韦方程组的第二个式子中，可以得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} \quad (2.1.2)$$

根据矢量分析，有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.1.3)$$

采用库仑规范($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$),则有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.1.4)$$

利用格林函数可以解得失势的表达式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r} \quad (2.1.5)$$

其中 x' 是源点， x 是场点， r 为 x' 到 x 的距离。于是可以求出磁感应强度 \mathbf{B}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}{r} \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v -\frac{\hat{r}}{r^2} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV'
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

用 \mathbf{Idl} 代替 $\mathbf{J}dV'$ 得到

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{\mathbf{Idl} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{2.1.7}$$

这就是毕奥-萨法尔定律

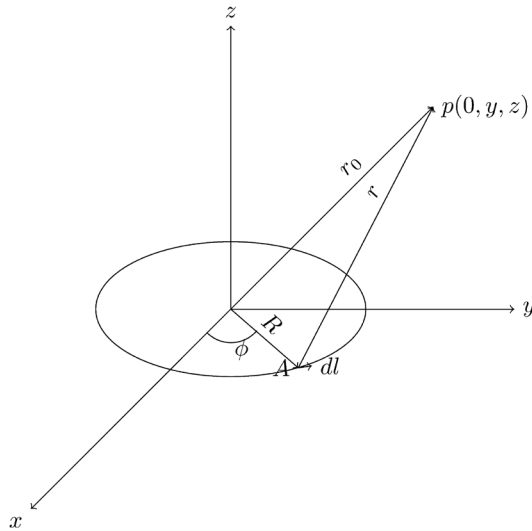


图 2.1 电流元在 p 点的磁场

假设带电圆环在 xoy 平面上，且圆心为原点，半径为 R ，电流为 I ，带电圆环在空间中产生的磁场大小是关于 z 轴对称的，为了使问题简化，考虑一点 $P(0,y,z)$ 位于 $yo z$ 平面。下面开始推导单匝电流环在空间中产生的磁场^[18]

$$\vec{r}_0 = y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{R} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} \tag{2.1.8}$$

其中 $x_A = R\cos\phi$ ， $y_A = R\sin\phi$ ，则

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{R} = -R\cos\phi\vec{i} + (y - R\sin\phi)\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.1.9)$$

r 的大小为

$$|r| = \sqrt{R^2 + y^2 + z^2 - 2Ry\sin\phi} \quad (2.1.10)$$

弧长的微分可以写成

$$d\vec{l} = dx_A\vec{i} + dy_A\vec{j} = (-R\sin\phi\vec{i} + R\cos\phi\vec{j})d\phi \quad (2.1.11)$$

$$\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin\phi d\phi & R\cos\phi d\phi & 0 \\ -R\cos\phi & y - R\sin\phi & z \end{vmatrix} = (IzR\cos\phi d\phi, IzR\sin\phi d\phi, (-IRy\sin\phi + IR^2)d\phi) \quad (2.1.12)$$

根据毕奥-萨法尔定律，可以写出

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} zR\cos\phi d\phi \\ dB_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} zR\sin\phi d\phi \\ dB_z &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} (R - y\sin\phi) d\phi \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

对 ϕ 积分，可以得到三个方向的磁场分量

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu_0 IzR}{4\pi r^3} \cos\phi d\phi = \frac{\mu_0 Iz}{4\pi y} (R^2 + y^2 + z^2 - 2Ry\sin\phi)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ B_y &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 IzR}{4\pi r^3} \sin\phi d\phi = \frac{\mu_0 IzR}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi}{(R^2 + y^2 + z^2 - 2Ry\sin\phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi \\ B_z &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R - y\sin\phi) d\phi \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

令 $\phi = 2\varphi - \pi/2$, $r_R = \sqrt{(R+y)^2 + z^2}$, $k^2 = 4Ry/r_R^2$, 则

$$\begin{aligned} d\phi &= 2d\varphi, \sin\phi = 2\sin^2\varphi - 1 \\ r^3 &= r_R^3 (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

于是

$$\begin{aligned}
 B_y &= \frac{\mu_0 I z R}{2\pi r_R^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(2\sin^2\varphi - 1)}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi \\
 &= \frac{2\mu_0 I z R}{\pi r_R^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi - \frac{\mu_0 I z R}{\pi r_R^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \right] d\varphi
 \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

对于第一个积分，可以写成如下两个积分相加

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = -\frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} d\varphi + \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \tag{2.1.17}$$

考虑下面的式子

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 - k^2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{d}{d\varphi} \left[\sin\varphi \cos\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 = &\frac{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^2}{(1 - k^2)(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2}{1 - k^2} \left[\cos^2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} - \sin^2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 &\left. + k^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} \right] \\
 = &\frac{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^2}{(1 - k^2)(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\
 &- \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{\cos^2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi) - \sin^2\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi) + k^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \\
 = &(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

两边同时对 φ 积分

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - k^2} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\
 &\quad - \frac{k^2}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\varphi} \left[\sin\varphi \cos\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \right] d\varphi \\
 &= \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} d\varphi \\
 &\quad - \frac{k^2}{1 - k^2} \cdot \sin\varphi \cos\varphi (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} d\varphi
 \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2.1.19)$$

左边的积分为第一类椭圆函数

$$K(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (2.1.20)$$

右边的积分为第二类椭圆函数

$$E(k^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2.1.21)$$

将 $E(k^2)$ 和 $K(k^2)$ 的表达式带入到式(2.1.16)和式(2.1.17)，经过一系列的化简后得到

$$B_y = \frac{\mu_0 I z}{2\pi} \frac{1}{y \sqrt{(R+y)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 + y^2 + z^2}{(R-y)^2 + z^2} E(k^2) - K(k^2) \right] \quad (2.1.22)$$

利用同样的方法可以解得

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(R+y)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 - y^2 - z^2}{(R-y)^2 + z^2} E(k^2) + K(k^2) \right] \quad (2.1.23)$$

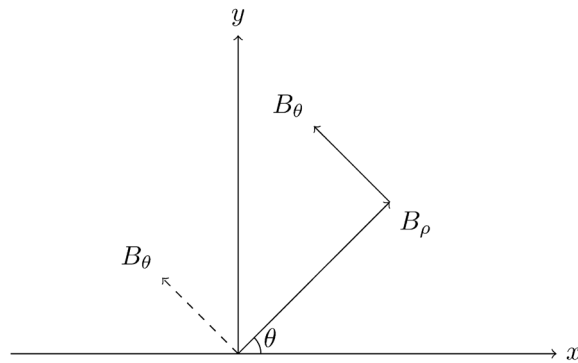


图 2.2 向量在极坐标与直角坐标的转换

单电流环在空间中任意一点 $p(x,y,z)$ 的磁场分量可以表示为下列形式

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_\rho \cos\theta - B_\theta \sin\theta \\
 B_y &= B_\rho \sin\theta + B_\theta \cos\theta \\
 B_z &= B_z
 \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

其中 B_θ , B_ρ 是柱坐标下磁感应强度在 θ , ρ 方向上的分量。当 $\theta = \pi/2$ 时, $B_\rho = B_y, B_z = B_z, B_\theta = -B_x, \rho = y$, 所以在极坐标下

$$\begin{aligned}
 B_\rho &= \frac{\mu_0 I z}{2\pi} \frac{1}{\rho \sqrt{(R+\rho)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} E(k^2) - K(k^2) \right] \\
 B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(R+\rho)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} E(k^2) + K(k^2) \right] \\
 B_\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1.25}$$

其中

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R+\rho)^2 + z^2} \tag{2.1.26}$$

当 $\rho \rightarrow R, z \rightarrow 0$ 时, $k^2 \rightarrow 1$, 令 $k' = \sqrt{1-k^2}$, 将第一类和第二类椭圆函数在 k' 附近进行展开, 有

$$K = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 \tag{2.1.27}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) k'^4 \tag{2.1.28}$$

在局部坐标系中按照 r/R 的幂, 精确至二阶项, 得到^[19]

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[1 - \frac{r}{2R} \ln \frac{8R}{r} \cos\theta + \frac{r^2}{16R^2} \left(6 \ln \frac{8R}{r} - 5 \right) \cos 2\theta \right] \tag{2.1.29}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\left(\ln \frac{8R}{r} - 1 \right) \sin\theta - \frac{r}{4R} \left(3 \ln \frac{8R}{r} - 4 \right) \sin 2\theta \right] \tag{2.1.30}$$

2.2 单匝电流环的磁场位形模拟

根据毕奥萨伐尔定律, 可以得到磁力线满足下面的方程

$$\frac{dx}{dB_x} = \frac{dy}{dB_y} = \frac{dz}{dB_z} = \frac{l}{B} \tag{2.2.1}$$

经过简单的变形, 方程可以化为下面的形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = \frac{B_x}{B} \\ \frac{dy}{dl} = \frac{B_y}{B} \\ \frac{dz}{dl} = \frac{B_z}{B} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

这是三个一阶常微分方程，对于一个一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.23)$$

最简单的数值解法就是利用一阶差分方程来代替微分方程，如果采用一阶向前差分，则方程化为

$$y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)h \quad (2.24)$$

h 是步长， y_i 是 $x_i = x_0 + ih$ 处的值， y_{i+1} 是下一个点的函数值，只要知道了初值 y_0 ，并且将步长取得足够小，我们就可以近似的求出 y 的值。这种方法的好处是简单直接，便于编程，但是收敛阶数低。对于对精度要求比较高的场合可以采用龙格-库塔法或者有限元法。龙格-库塔法基于用临近一些点上的函数值近似表示函数在一个点上的导数值的思想，有限元法基于变分原理，适用于用任何微分方程所描述的物理场。使用有限元法的步骤一般为^[20]：

- (1) 点阵输入分配和输入
- (2) 计算每个单元的矩阵和单元矢量
- (3) 装配单元矩阵和矢量成为系统矩阵和矢量
- (4) 将系统约束应用到系统矩阵和矢量
- (5) 对于初级节点变量求解矩阵方程
- (6) 计算二级变量
- (7) 输出结果等

现在计算机都是采用的二进制，计算机对数进行运算，都是先将这个数转化为二进制然后在进行运算，在将不同进制的数转化成二进制数的过程中，由于计算机的精度有限，就会出现舍掉一些位的情况，这就会造成误差。也就是说数值计算都是不精确的，但是只要满足了一定的精度，我们就认为这个数是合理的。

根据上面推导得出的公式，可以通过 MATLAB 编程计算出单电流环在空间任意位置处产生的磁场大小。下面的代码^[21]为计算单电流环在空间中某一点的磁场大小，其中 $c_0 = \mu_0/2\pi = 2 \times 10^{-7}$ ， R 为线圈半径，单位米， I 为电流，单位安培，输入空间某点的坐标 (x,y,z) ，返回磁场在 x ， y ， z 方向的值。“magnetic.m”

```
%c0=u0/2pi, R: 线圈半径 (m), I: 电流 (A)
%Bx,By,Bz: 磁感应强度在三个坐标上的分量
function [Bx,By,Bz]=magnetic(c0,R,I,x,y,z)
rho=sqrt(x^2+y^2);
theta=atan2(y,x); %tan(y/x)=theta,theta 为幅度值
k2=4*R*rho/((R+rho)^2+z^2); %k 方
k2=k2-eps;
[K,E]=ellipke(k2);
```

```

dd=(R-rho)^2+z^2;
dd=dd+eps;
B_rho=c0*I*z/((rho+1e-3)*sqrt((R+rho)^2+z^2))*...
((R^2+rho^2+z^2)/dd*E-K);
B_z=c0*I/sqrt((R+rho)^2+z^2)*((R^2-rho^2-z^2)/dd*E+K);
B_theta=0;
Bx=B_rho*cos(theta)-B_theta*sin(theta);
By=B_rho*sin(theta)+B_theta*cos(theta);
Bz=B_z;
end

```

用代码“*Single_Coil_3D.m*”计算单环在空间中产生的磁感性强度分布，经过模拟得到的电流圆环在空间中的磁力线分布，如图（2.3）所示

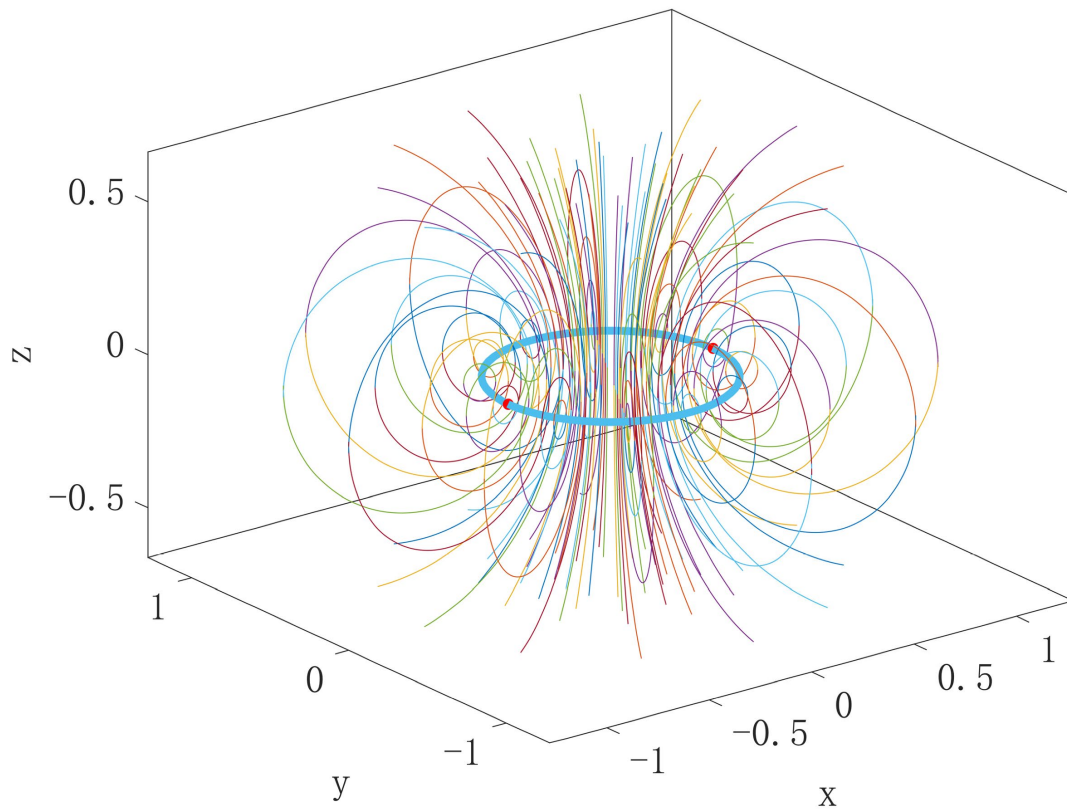


图 2.3 单匝电流环在空间中产生的磁力线分布

用代码*Single_Coil_2D*计算磁力线在 $x-z$ 平面的分布，如图（2.4）所示

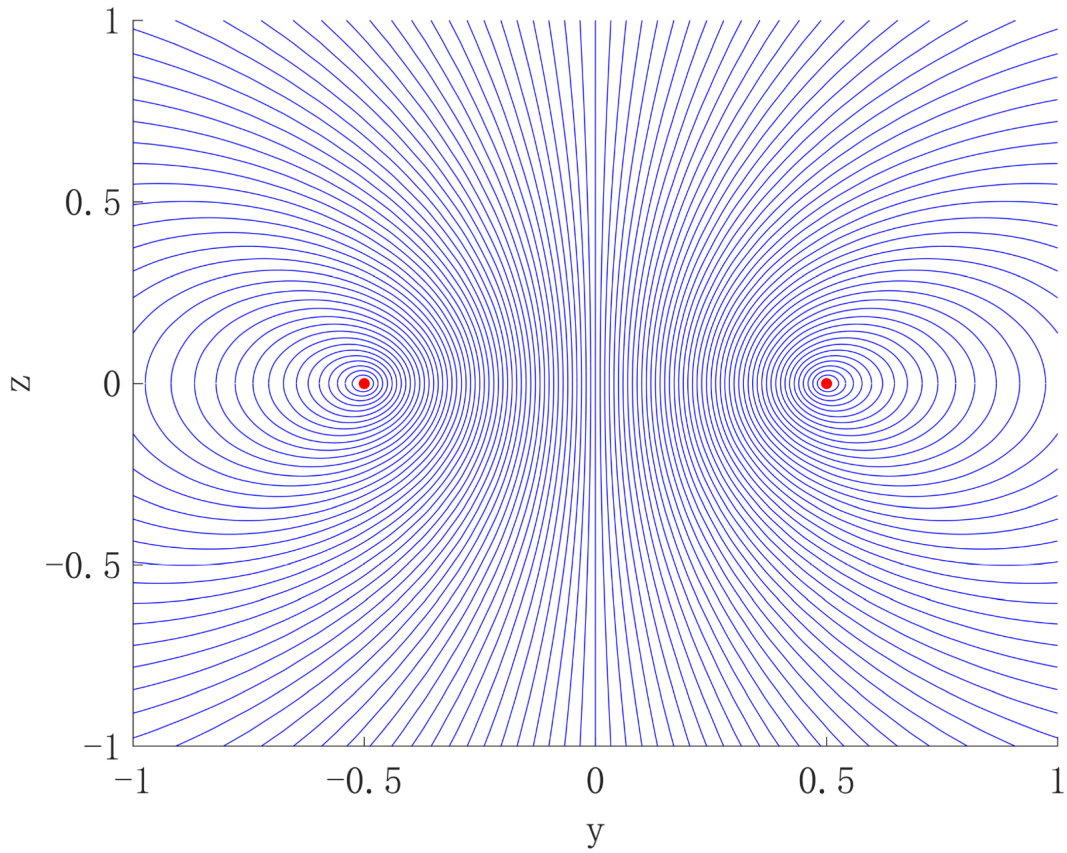


图 2.4 单电流环磁力线分布 (2D)

从图 (2.3) 和图 (2.4) 可以看出, 单电流环在空间中产生的磁场是成轴对称分布的并且磁场在线圈周围最强, 在线圈内, 越往线圈中心, 磁场越弱, 在线圈外, 越远离线圈, 磁场越弱。这与我们的认识相一致。

3 磁镜

3.1 磁镜装置

在平行方向增强的磁场位形称为磁镜场，根据这个原理做成的等离子体约束装置称为磁镜。它有以下优点^[22]:

- (1) 设计简单，易于升级和维护
- (2) 可以自行去除杂质和聚变反应产物
- (3) 是一个高 β 装置（ β 是等离子体压强与磁压强之比，它度量了多大的磁场可以约束多少的等离子体），与环形系统相比，更加有效的利用磁场
- (4) 通过等离子体热通量和辐射，相对较低且易于控制的壁载荷
- (5) 将等离子体“废气”直接转换为电能的可能性
- (6) 不需要辅助加热就可以稳态运行等等

它是一种开环装置，端部有磁损失。最简单的磁镜可以用位于同一对称轴上的两个电流方向一致的圆线圈组成。令 $v_{//}$ 表示与磁场方向平行的速度， v_{\perp} 表示与磁场方向垂直的速度。定义磁矩 μ 为

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \quad (3.1.1)$$

将 $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ 带入到 $d(\mu B)/dt$ 中得到

$$\frac{d\mu B}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{dt} \quad (3.1.2)$$

由于洛伦兹力对带电粒子不做功，故有

$$\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{//}^2 = const \quad (3.1.3)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d\mu B}{dt} &= -\frac{d\frac{1}{2}mv_{//}^2}{dt} = -mv_{//}\frac{dv_{//}}{dt} \\ &= \mu v_{//}\nabla_{//}B = \mu \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dB}{dt} = \mu \frac{dB}{dt} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

与下面的式子进行对比

$$\frac{d\mu B}{dt} = B \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dB}{dt} \quad (3.1.5)$$

可以得到

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (3.1.6)$$

μ 是一个绝热不变量，其大小等于带电粒子的回旋周期平均磁矩。

3.2 磁镜的磁场位形

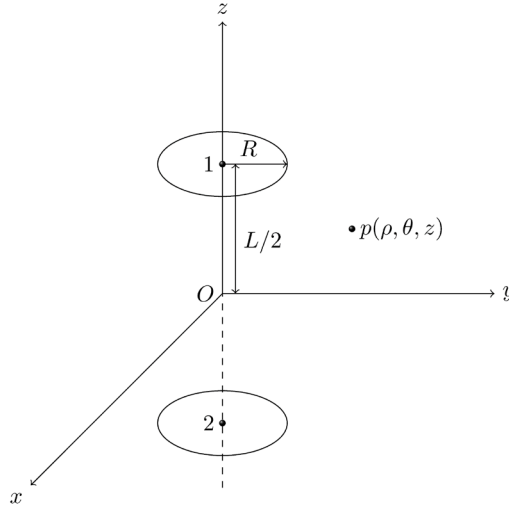


图 3.1 简单磁镜装置模型

线圈 1 和 2 通有大小和方向相同的电流，两线圈相距为 L ，半径为 R ，以两线圈圆心连线的中心为原点，建立如图的坐标系。线圈 1 在 $p(\rho, \theta, z)$ 产生的磁场为

$$\begin{aligned} B_{\rho 1} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{Z - \frac{L}{2}}{\rho \sqrt{(R + \rho)^2 + (Z - \frac{L}{2})^2}} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + (Z - \frac{L}{2})^2}{(R - \rho)^2 + (Z - \frac{L}{2})^2} E(k_1^2) - K(k_1^2) \right] \\ B_{z1} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R + \rho)^2 + (Z - \frac{L}{2})^2}} \left[\frac{R^2 - \rho^2 - (Z - \frac{L}{2})^2}{\sqrt{(R + \rho)^2 + (Z - \frac{L}{2})^2}} E(k_1^2) + K(k_1^2) \right] \\ B_{\theta 1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ k_1^2 &= \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + (z - L/2)^2} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

线圈 2 在 $p(\rho, \theta, z)$ 处产生的磁场为

$$\begin{aligned}
 B_{\rho 2} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{Z + \frac{L}{2}}{\rho \sqrt{(R + \rho)^2 + (Z + \frac{L}{2})^2}} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + (Z + \frac{L}{2})^2}{(R - \rho)^2 + (Z + \frac{L}{2})^2} E(k_2^2) - K(k_2^2) \right] \\
 B_{z2} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R + \rho)^2 + (Z + \frac{L}{2})^2}} \left[\frac{R^2 - \rho^2 - (Z + \frac{L}{2})^2}{\sqrt{(R + \rho)^2 + (Z + \frac{L}{2})^2}} E(k_2^2) + K(k_2^2) \right] \\
 B_{\theta 2} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &= x^2 + y^2 \\
 k_2^2 &= \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + (z + L/2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

磁镜中的磁场可以看成两个单环产生的磁场的叠加，则 $p(\rho, \theta, z)$ 处的磁场大小为

$$\begin{aligned}
 B_x &= (B_{\rho 1} + B_{\rho 2}) \cos\theta = B_{x1} + B_{x2} \\
 B_y &= (B_{\rho 1} + B_{\rho 2}) \sin\theta = B_{y1} + B_{y2} \\
 B_z &= B_{z1} + B_{z2}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

用代码 `Simple_Mirror_3D.m` 计算磁场在空间中产生的磁感应强度分布，经过模拟得到的磁镜在空间中的磁力线分布，如图（3.2）所示

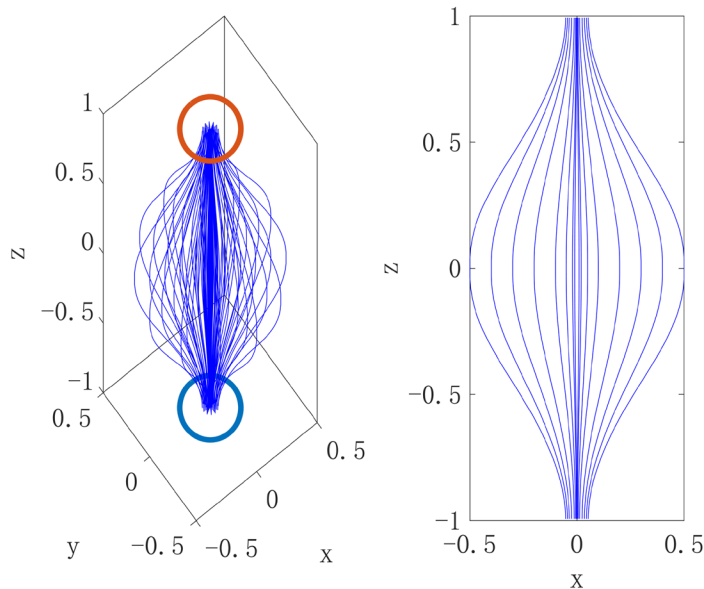


图 3.2 磁镜中磁力线分布

用代码`Simple_Mirror_2D.m`计算磁场在 x - z 平面产生的磁感应强度分布, 经过模拟得到的磁镜在 x - z 平面的磁力线分布, 如图 (3.3) 所示

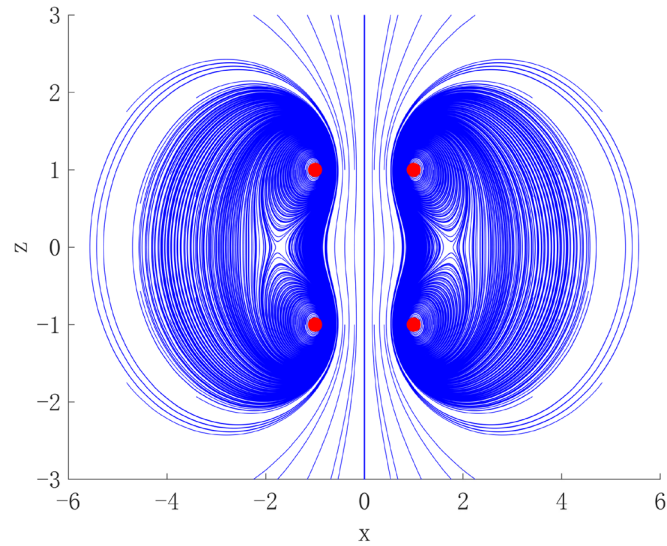


图 3.3 磁力线分布

简单磁镜在轴向上磁感应强度分布如图 (3.4) 所示

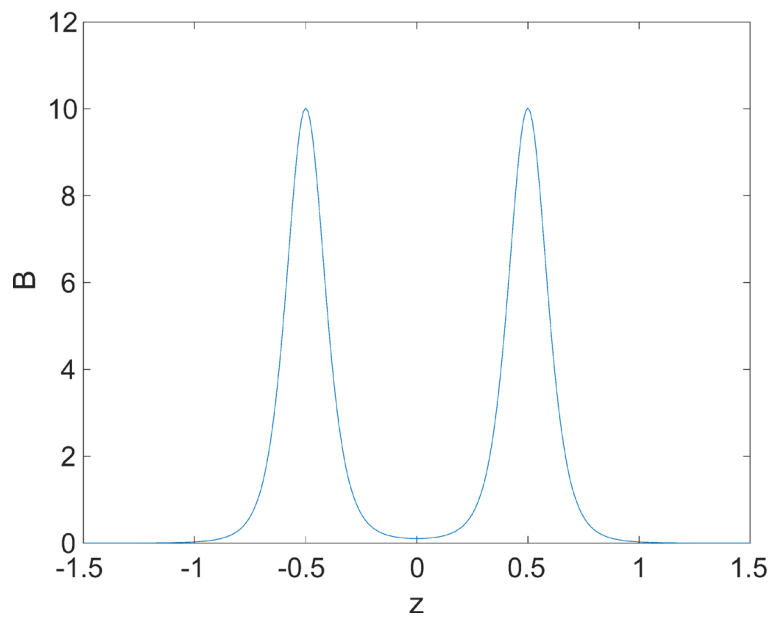


图 3.4 简单磁镜的磁场轴向分布

3.3 带电粒子在磁镜中的运动

带电粒子在磁场中沿着磁力线做螺旋运动。导向中心沿着磁力线，以拉莫尔半径绕磁力线运动。当磁场随时间或者空间缓慢变化时，即磁场变化跟离子回旋相比可忽略时，磁矩 $\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B}$ 守恒，磁镜中的磁场分布是两边比较强，中间比较弱，当一帶有电荷的粒子从磁场比较弱的地方往磁场比较强的地方运动，由于磁矩守恒，带电粒子在垂直方向的速度增加，由于动能守恒，带电粒子在水平方向的速度必定下降。当粒子水平方向速度变为零时，由于受到 $F = -\nabla_{\parallel}B$ 的力，会往相反的方向运行，这样粒子便约束在磁镜中^[23,24]。粒子绕磁力线做回旋运动的拉莫尔半径为 $r_L = \mu/B$ ，所以当粒子从磁场比较弱的地方运动到磁场比较强的地方时，粒子的拉莫尔半径会降低。

带电粒子在电磁场中运动遵循

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.3.1)$$

假设带电粒子在磁镜装置中只收到洛伦兹力的作用，即可以略去 $q\mathbf{E}$ 项，则上式化为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.3.2)$$

其中 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ， $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ，写成分量形式有

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{q}{m} (v_y B_z - v_z B_y) \\ \dot{v}_y &= \frac{q}{m} (v_z B_x - v_x B_z) \\ \dot{v}_z &= \frac{q}{m} (v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

将上式在对 t 求一次导得到

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{q}{m} \left(\frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_y \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{q}{m} \left(\frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{q}{m} \left(\frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x \right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

对于上面的常微分方程，我们可以令 $x = y_1, y = y_2, z = y_3, dx/dt = y_4, dy/dt = y_5, dz/dt = y_6$ ，这样二阶方程就化为了一阶方程

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= y_4, \frac{dy_2}{dt} = y_5, \frac{dy_3}{dt} = y_6 \\
\frac{dy_4}{dt} &= \frac{q}{m}(y_5B_z - y_6B_y) \\
\frac{dy_5}{dt} &= \frac{q}{m}(y_6B_x - y_4B_z) \\
\frac{dy_6}{dt} &= \frac{q}{m}(y_4B_y - y_5B_x)
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

对于这个一阶方程组，令

$$\begin{aligned}
y &= [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6] \\
f &= \left[y_4, y_5, y_6, \frac{q}{m}(y_5B_z - y_6B_y), \frac{q}{m}(y_6B_x - y_4B_z), \frac{q}{m}(y_4B_y - y_5B_x) \right]
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

方程组化为

$$\frac{dy}{dt} = f \tag{3.3.7}$$

然后可以利用龙格-库塔法进行数值求解，对于形如 $du/dt = f(t, u)$ 的一阶常微分方程，下面是常见的四阶 RK 公式

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, u_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{hk_1}{2}\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{hk_2}{2}\right) \\
k_4 &= f(t_i + h, u_i + hk_3) \\
u_{i+1} &= u_i + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

其中 h 是步长，其值取得越小，最终得到的结果越准确。在 `matlab` 中可以用 `ode45` 来求解上述方程组，`ode45` 是用 4 阶方法提供候选解，5 阶方法控制误差，是一种自适应步长的方法。用如下代码构建函数 `f`，“`odefun.m`”

```

function dydt=odefun(t,y)
%c0=u0/2pi, R: 线圈半径 (m), L: 两线圈距离 (m), I: 线圈电流 (A)
c0=2e-7;R=0.2;L=2;I=1e6;
%氢离子
q=1.6e-19;m=1.6726231e-27;
dydt=zeros(6,1);
dydt(1)=y(4);
dydt(2)=y(5);

```

```

dydt(3)=y(6);
[Bx1,By1,Bz1]=magnetic(c0,R,I,y(1),y(2),y(3)+L/2);
[Bx2,By2,Bz2]=magnetic(c0,R,I,y(1),y(2),y(3)-L/2);
Bx=Bx1+Bx2;By=By1+By2;Bz=Bz1+Bz2;
dydt(4)=q/m*(y(5)*Bz-y(6)*By);
dydt(5)=q/m*(y(6)*Bx-y(4)*Bz);
dydt(6)=q/m*(y(4)*By-y(5)*Bx);
end

```

下面的代码模拟带电粒子在磁镜场中收到反射的情况，*orbit.m*

```

tic
%初始位置和速度
y0=[0 0.01 0.8 0 sqrt(2)/2*1e6 sqrt(2)/2*1e6];
dt=1e-10;
tspan=[0:dt:6e-7];
[t,y]=ode45('odefun',tspan,y0);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));
% GIF
%for i=1:length(y(:,1))
% plot3(y(i,1),y(i,2),y(i,3),'.');hold on;
% pause(0.001)
%end
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
toc

```

得到的结果

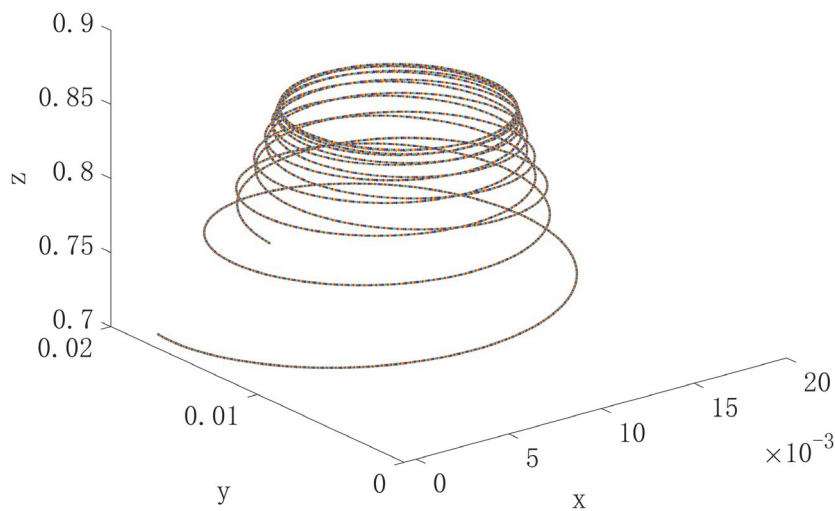


图 3.5 带电粒子在磁镜场中的运动轨迹

图 (3.5) 模拟的条件为 $R=0.2$; $L=2$; $I=1e6$; 带电粒子为氢离子, 初始位置为 $(0, 0.01, 0.8)$, 初始速度为 $(0, \sqrt{2}/2 * 1e6, \sqrt{2}/2 * 1e6)$ 。氢离子从弱场区运动到强场区, 在达到磁场最强之前平行速度变为了零, 在 $F = -\nabla_{//} B$ 的作用下, 粒子反向运动。

只有当带电粒子的初始位置等于其拉莫尔半径时, 带电粒子从磁场区域比较弱的地方向磁场区域比较强的地方运动时, v_{\perp} 才是严格单调变化, 当不满足这个关系时, 带电粒子在磁镜场中的运动将会变得十分复杂^[25]。

假设一带电粒子以初速度 v_0 从磁镜中间平面 A 点开始运动, A 的磁场为 B_{min}

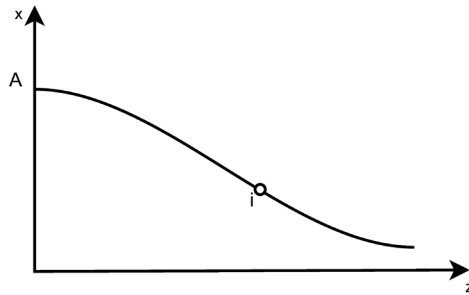


图 3.6 粒子在 i 点反射

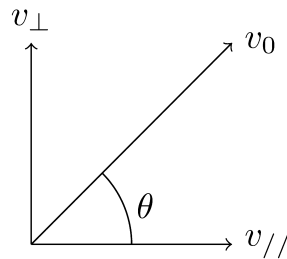


图 3.7 粒子在 A 点速度

带电粒子的初速度与 $v_{//}$ 夹角为 θ , 根据上面的前面的分析, 由于磁矩不变, 带电粒子在运动过程中会收到反弹, 设带电粒子在点 i 点发生发射且 i 点的磁场为 B_i , 在 i 点, $v_{\perp} = v_0$, $v_{//} = 0$; 根据磁矩守恒^[26]有:

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2B_{min}} = \frac{mv_0^2}{2B_i} \quad (3.3.9)$$

它可以化简为

$$\frac{v_{\perp}^2}{v_0^2} = \frac{B_{min}}{B_i} \quad (3.3.10)$$

而 $\sin\theta = v_{\perp}/v_0$ ，所以 $\sin^2\theta = B_{min}/B_i$ ，带电粒子若不能在磁镜边缘发生发射，便会从磁镜中逃逸出去，设磁镜边缘磁场为 B_{max} ，临界角 θ_c 满足

$$\sin^2\theta_c = \frac{B_{min}}{B_{max}} \quad (3.3.11)$$

定义磁镜比 R 为

$$R = \frac{B_{max}}{B_{min}} \quad (3.3.12)$$

我们可以认为倾角 θ 在 $\theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c$ 内的粒子将不会受到反射而损失^[27]。假设粒子初始时是服从麦克斯韦分布 $F_M(v)$ ， f 代表约束住的粒子占总粒子数的比值，它也等于在损失锥外的粒子数与总的粒子数的比值：

$$f = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv}{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv} = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} = \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.13)$$

实际约束住的粒子的比例要小于 f ，这是因为当损失锥中粒子损失掉后，粒子与粒子之间的库伦碰撞又会使得粒子发生重新分布，其结果就是磁镜中的粒子的分布又服从麦克斯韦分布，又有一部分粒子位于损失锥中，然后这些粒子很快就会在装置终端损失掉，也就是说简单此磁镜无法完全约束住粒子，磁镜中的粒子约束时间大约为

$$\tau_p \approx \tau_{ii} \ln R \quad (3.3.14)$$

其中 τ_{ii} 为离子-离子碰撞时间，它正比于 $T_i^{3/2}$ ， T_i 为离子温度。下面是模拟在不同位置和速度的氢离子在磁镜场中的运动轨迹，其中 $R=0.2$ ； $L=2$ ； $I=1e6$ 。

初始位置和速度：(0 0.01 0.6 0 0.707e6 0.707e5)

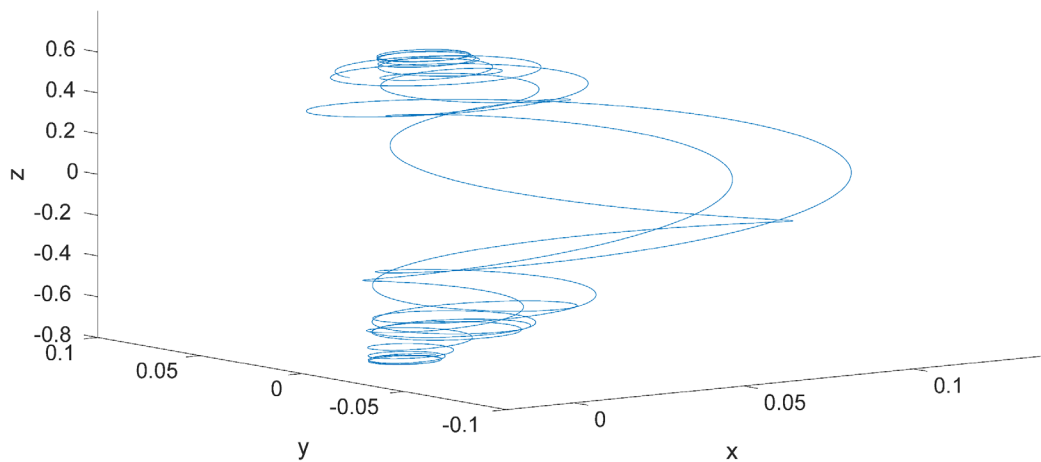


图 3.8 约束在磁镜中的氢离子轨迹

初始位置和速度: (0 0.01 -1 0 0.707e6 0.707e5)

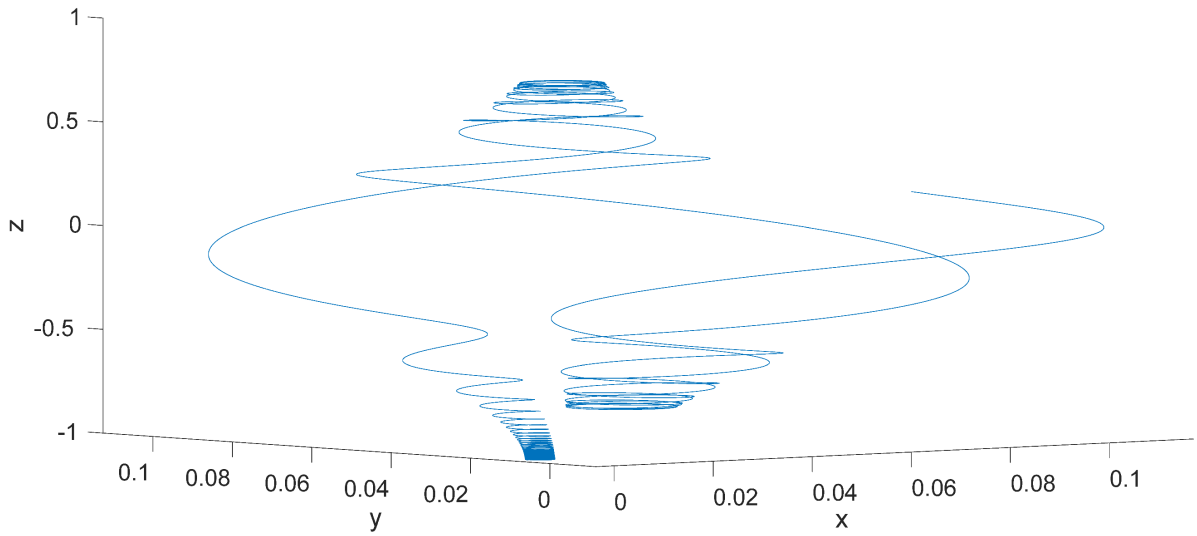


图 3.9 氢离子在磁镜场中存在飘逸的轨迹

初始位置和速度: (0 0.00075 -1 0 0.707e6 0.707e5)

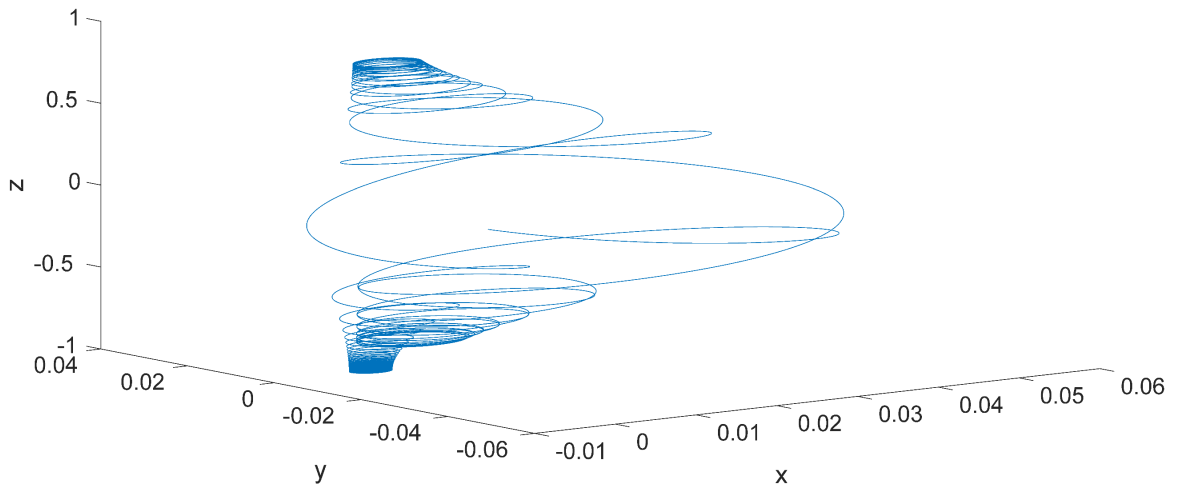


图 3.10 氢离子在磁镜中运动飘逸较弱的运动轨迹

初始位置和速度：(0 0.1 0.75 0 1.414e5 1.414e6)

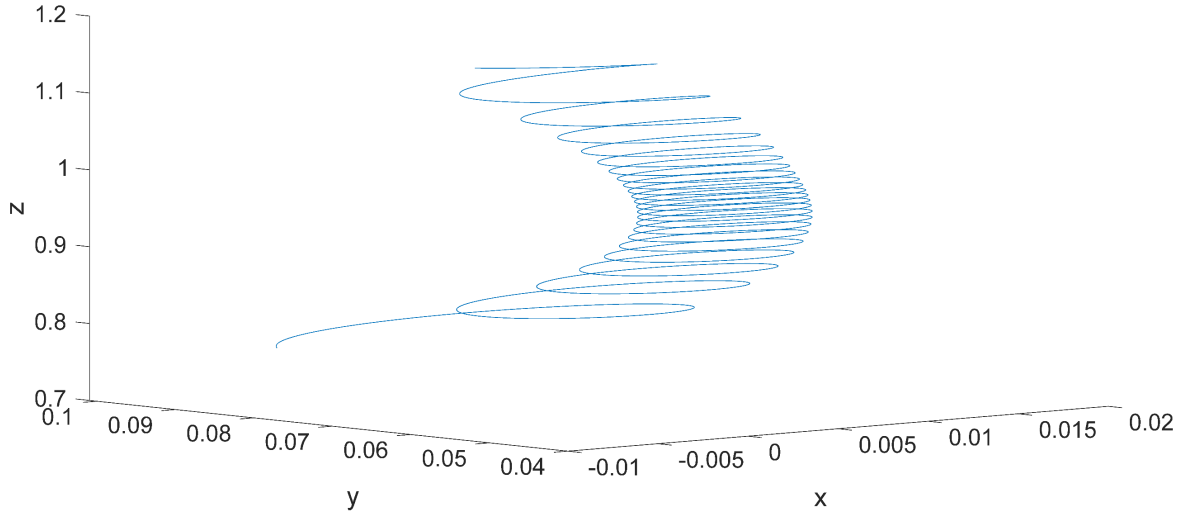


图 3.11 氢离子逃出磁镜约束的运动轨迹

图 (3.8) 是氢离子在初始位置为 $(0, 0.01, 0.6)$ ，初始速度为 $(0, \sqrt{2}/2 \times 10^6, \sqrt{2}/2 \times 10^5)$ 时在磁镜场中的运动轨迹，氢离子在两个磁镜点中做往返螺旋运动。图 (3.9) 是氢离子在初始位置为 $(0, 0.01, -1)$ ，初始速度为 $(0, \sqrt{2}/2 \times 10^6, \sqrt{2}/2 \times 10^5)$ 时在磁镜场中的运动轨迹，当氢离子的初始位置与其拉莫尔半径相差比较大时，氢离子除了做往返螺旋运动外，还存在明显的飘逸，这一方面是由于龙格-库塔法能量不守恒造成的，另一方面，是由于粒子实际的受力情况所决定的。图 (3.10) 是氢离子在初始位置为 $(0, 0.0075, 1)$ ，初始速度为 $(0, \sqrt{2}/2 \times 10^6, \sqrt{2}/2 \times 10^5)$ 时在磁镜场中的运动轨迹，氢离子的初始位置与其拉莫尔半径匹配相差不是那么大时，飘逸现象明显减弱。图 (3.11) 是氢离子在初始位置为 $(0, 0.1, 0.75)$ ，初始速度为 $(0, \sqrt{2} \times 10^5, \sqrt{2} \times 10^6)$ 时在磁镜场中的运动轨迹，由于 θ 角太小，位于损失锥内，氢离子逃出磁镜的约束。

简单磁镜在终端损失很严重，以至于不可能在稳态磁镜反应堆上获得高功率增益。为了解决终端损失问题，人们又相继提出了标准磁镜以及串列磁镜。标准磁镜是用最小 B 磁场位形构成的磁镜，所谓最小 B 位形也就是在径向越往边界磁场越强，中心处的磁场最弱。虽然标准磁镜的宏观不稳定性有了一定的改善，但还是存在约束性能的问题导致标准磁镜后来没有得到很好的发展。为了改善约束性能，一个很简单的想法就是将多个磁镜串联，但是这样就大大的增加了装置的成本，而且还需要考虑到能量增益的问题，另一个想法就是将磁镜两边给“堵”住。这就产生了串列磁镜，串列磁镜由一个中心室和两个端塞室组成，两个端塞室是由最小标准磁镜组成，由于这样做了这样特殊的处理，在中心室中的离子约束时间变为

$$\tau_i = \frac{e\phi_i}{T_i} \exp\left(\frac{e\phi_i}{T_i}\right) \tau_{ii} \quad (3.3.15)$$

中 T_i 是离子温度， τ_{ii} 为离子碰撞时间， $e\phi_i$ 为离子势垒高度，

$$e\phi_i = T_e \ln \frac{n_p}{n_c} \quad (3.3.16)$$

中 T_e 电子温度， n_p 为端塞室粒子密度， n_c 为中心室离子密度。为了进一步提高中心室中的离子约束时间，又提出了热垒、气体动力阱（gas dynamic trap）^[28]、锚（anchor）的概念。磁镜经过长时间的发展取得了很好的成就，如今任然在不断发展，不断有新的设计方案提出。

4 粗电流环的磁场位形

4.1 环向场线圈的磁场位形

根据前面的分析，我们知道磁镜对等离子体的约束性能不好，磁镜两端有开放的磁力线，带电粒子会沿着这些磁力线从磁镜中跑出，造成终端损失。除了上面提到的串列磁镜外，还可以让磁力线完全封闭在等离子体区域中，这就是所谓的闭环装置。典型的封闭装置代表是托卡马克和仿星器。在托卡马克装置中，约束等离子体的磁场由多个环向场线圈产生，这些线圈分布在极向，如图（1.3）所示，根据安培环路定律有

$$NI = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (4.1.1)$$

假设环向磁场沿积分路径是均匀分布的，解得

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \quad (4.1.2)$$

其中 R 为与中轴的距离。以 $R = R_0$ （等离子体的中心处）的磁感应强度 B_0 为环向场的标定值，则环向场可以写成

$$B_t = \frac{R_0 B_0}{R} \quad (4.1.3)$$

磁场与形状无关，在电流均匀分布的情况下，距离中轴越近磁场越大，也就是说磁场不是均匀分布的，存在梯度，于是等离子体在磁场梯度和磁力线弯曲的情况下会产生漂移，使得离子和电子在 z 方向发生分离，分离的电子和离子又会产生电场。带电粒子就在电场和磁场的作用下运动，很快就会由于漂移而撞到壁上，造成粒子的损失。可见只用这个磁场还不能很好的约束等离子体，还必须加上由等离子体电流产生的极向场，叠加在一起构成螺旋场。

实际上，公式（4.1.2）描述的是一个弯成环形的螺线管在 R 处产生的平均磁场。在线圈是分立的情况下，线圈局部的磁场用这样来描述是不准确的，应该是加多个线圈产生的场叠加。为了描述环向磁场的非均匀性，我们引入波纹度的概念，它的定义为最外侧处的 $(B_{max} - B_{min}) / (B_{max} + B_{min})$ ，波纹度随大半径的增加而增加，波纹度会影响等离子体的约束性能和不稳定性。很明显，波纹度越小，磁场在最外侧分布的越均匀，在托卡马克的设计中，波纹度应该限制在百分之几以下。综合考虑各方面，一般的托卡马克装置的环向场线圈都在十几到三十几之间。

4.2 中心螺线管

托卡马克装置中的中心螺线管是用来启动等离子体电流和进行加热。在给中心螺线管通电时，会在托卡马克真空室中产生变化的磁通 $\Delta\phi$ ，这变化的磁通可以感应一个环向电动势

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.2.1)$$

这个感生电动势将托卡马克装置真空室中的气体击穿形成等离子体，由于等离子体中含有大量的带电粒子，这些粒子在电场的作用下会运动从而形成电流。等离子体是良导体，有一定的内阻，当等离子体中有电流时，便会产生欧姆热，从而对等离子体加热。中心螺线管与等离子体电流构成变压器的结构，由于这个变压器结构能够对等离子体进行加热，也被成为欧姆变压器。定义变压器能够产生的最大的磁场变化为伏秒数，为了产生的环电压能够击穿等离子体，必须要求伏秒数达到一定的值。当用欧姆加热等离子体时，随着等离子体温度的升高，等离子体的电阻会下降，再利用欧姆加热效果已经不明显了，所以单纯的用欧姆加热不能将等离子体加热到发生聚变的温度，还必须采用非感应电流驱动和辅助加热。

欧姆变压器既可以选择空芯的也可以选择铁芯的，对于空芯变压器来说，变压器的主体是一个直的螺线管，它位于等离子体内侧，设中心螺线管有 N 匝，通有电流 I ，半径为 R ，长为 L ，则螺线管在内部产生的磁场为

$$B = \mu NI \cos\alpha \quad (4.2.2)$$

μ 为磁导率， $\alpha = \tan^{-1}(R/L)$ ，对于大部分托卡马克装置中的中心螺线管都满足 $R \ll L$ ，即 $\alpha \rightarrow 0, \cos\alpha \rightarrow 1$ ，所以中心螺线管内部的磁场可近似为 $B = \mu NI/L$ ，与距离中轴的距离无关，磁通 $\Phi = \pi R^2 \mu NI$ ，所以磁通变化 $\frac{d\Phi}{dt}$ 与初级线圈的电流变化 $\frac{dI}{dt}$ 有关。

4.3 粗电流环的磁场位形

要想使得核聚变有净的能量输入，首先必须要求等离子体处于平衡状态^[29]。将托卡马克中的等离子体看成是导电且具有磁性的流体，在磁场的作用下达到平衡。在不考虑等离子体内部的宏观流动和黏滞项时，等离子体的基本静态平衡方程可以写为

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (4.3.1)$$

其中， p 是动力学压强， j 是电流密度。将 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ 带入到上式中

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] \quad (4.3.2)$$

经过简单的移项和合并，可以写成下面的式子

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (4.3.3)$$

这个式子描述了压强梯度与磁张力之间的关系。托卡马克中的等离子体平衡用格拉德—沙弗拉诺夫方程^[30]来描述

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dp(\psi)}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF(\psi)^2}{d\psi} \quad (4.3.4)$$

$p(\psi)$ 为压强， $F(\psi) = RB_\psi$ ，托卡马克等离子体平衡计算实际就是要求格拉德—沙弗拉诺夫方程。在本文中，假设等离子体已经达到平衡状态且截面是圆。

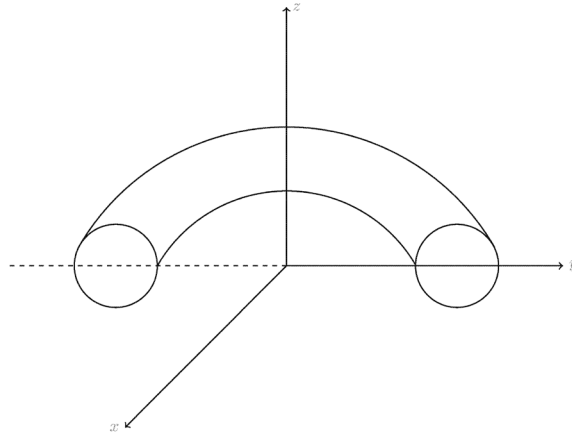


图 4.1 粗电流环

以大环中心为原心建立如图所示的极坐标

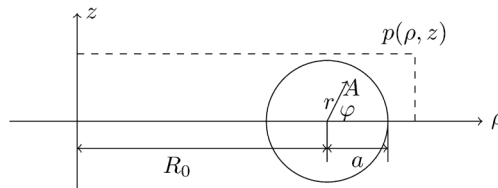


图 4.2 等离子体截面

单电流环 A 在 p 点产生的磁场只需把 B_ρ, B_θ, k^2 中的 R 变为 $R_0 + r \cos \varphi$ ， z 变为 $z - r \sin \varphi$ ， ρ 不变即可，粗电流环产生的磁场可以看成是无数个单电流环产生磁场的叠加，即对 r 和 θ 积分。

$$k^2 = \frac{4(R_0 + r \cos \varphi) \rho}{(R_0 + r \cos \varphi + \rho)^2 + (z - r \sin \varphi)^2} \quad (4.3.5)$$

$$B_{\rho}(\rho, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} J r (z - r \sin\varphi) \frac{\left[\frac{(R_0 + r \cos\varphi)^2 + \rho^2 + (z - r \sin\varphi)^2}{(R_0 + r \cos\varphi - \rho)^2 + (z - r \sin\varphi)^2} E(k^2) - K(k^2) \right]}{\rho \sqrt{(R_0 + r \cos\varphi + \rho)^2 + (z - r \sin\varphi)^2}} dr d\varphi \quad (4.3.6)$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} J r \frac{\left[\frac{(R_0 + r \cos\varphi)^2 - \rho^2 - (z - r \sin\varphi)^2}{(R_0 + r \cos\varphi - \rho)^2 + (z - r \sin\varphi)^2} E(k^2) + K(k^2) \right]}{\sqrt{(R_0 + r \cos\varphi + \rho)^2 + (z - r \sin\varphi)^2}} dr d\varphi \quad (4.3.7)$$

在 $B_{\rho}(\rho, z)$ 和 $B_z(\rho, z)$ 的表达式中,我们很容易发现当 $\rho = R_0 + r \cos\theta, z = r \sin\theta$ 时,会出现分母为零的情况,并且 $K(k^2) \rightarrow \infty$,这样被积函数中就会出现 $\infty - \infty$ 的情况,在数值计算中我们应当避免这种情况,一个很简单的处理办法就是将分母加上一个小量,将椭圆积分中的参数 k^2 减去一个小量。如果电流是均匀分布的,即 J 是一个常量,利用“*Coarse_Coils.m*”计算粗电流环在空间中产生的磁感应分布。得到的结果图(4.3)和图(4.4)所示

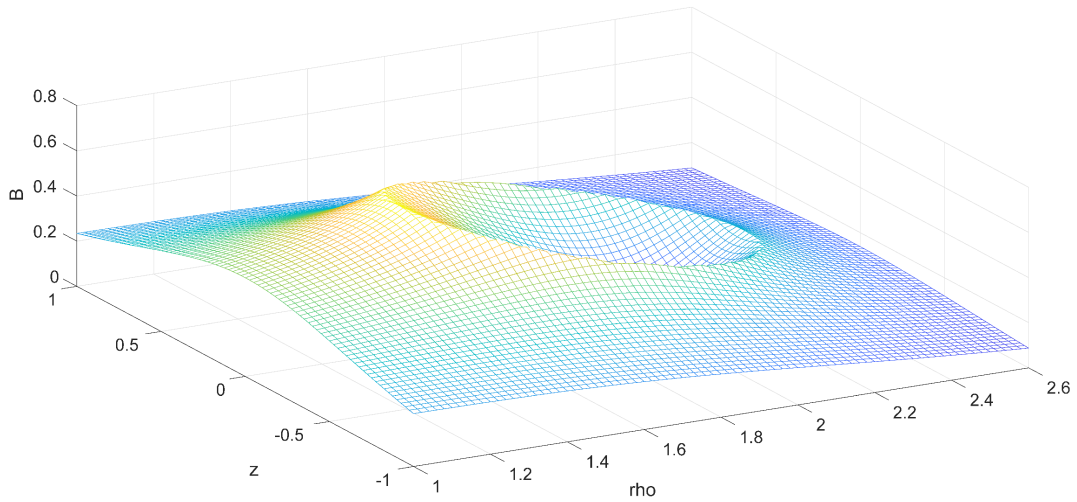


图 4.3 EAST 极向场分布

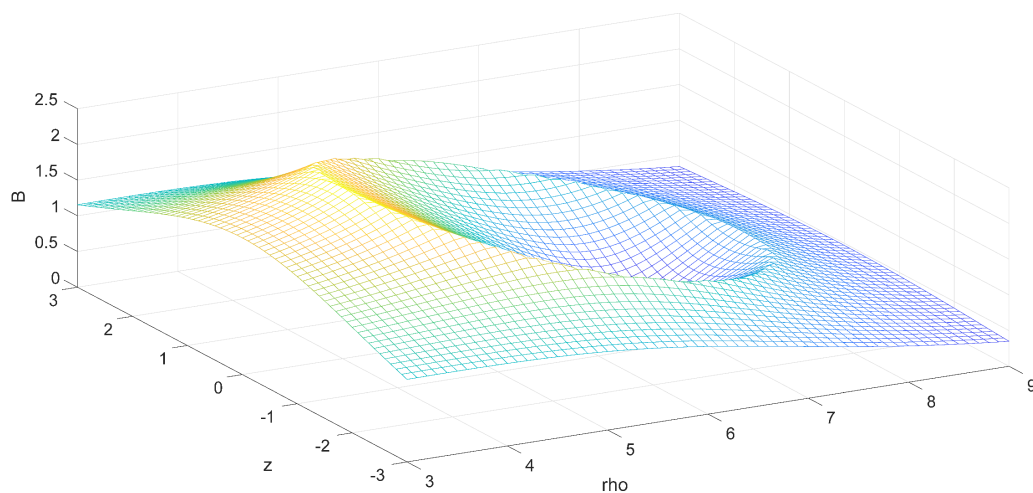


图 4.4 ITER 极向场分布

这跟无限长圆截面直导线的磁场分布很像，粗电流环可以想象成有限长圆截面直导线围成一个环。如果粗电流环内电流不均匀，考虑电流密度为以下表达式

$$J(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (4.3.8)$$

将 *Coarse_Coils.m* 中的电流改为非均匀分布即可计算出电流非均匀的粗电流环在空间中产生的磁感应分布，如图（4.5）和图（4.6）所示

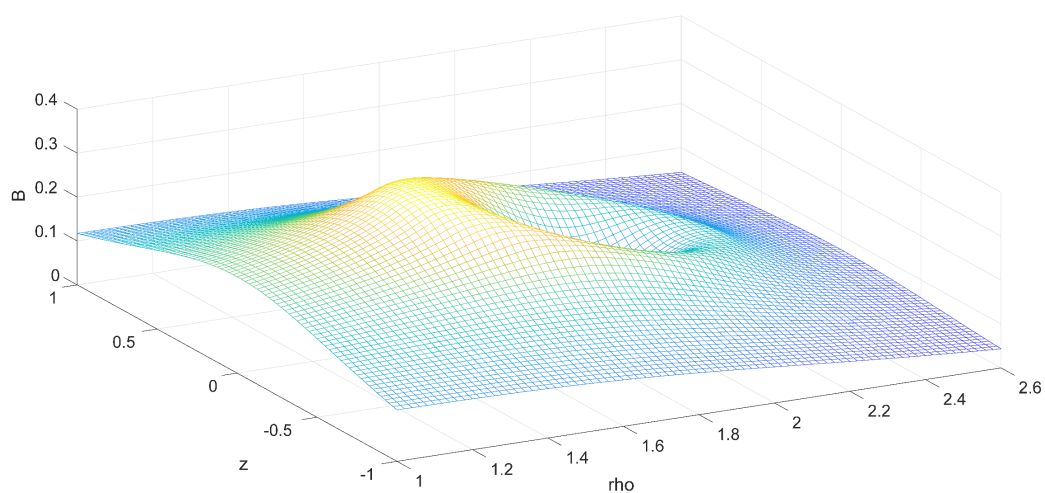


图 4.5 EAST 极向场分布

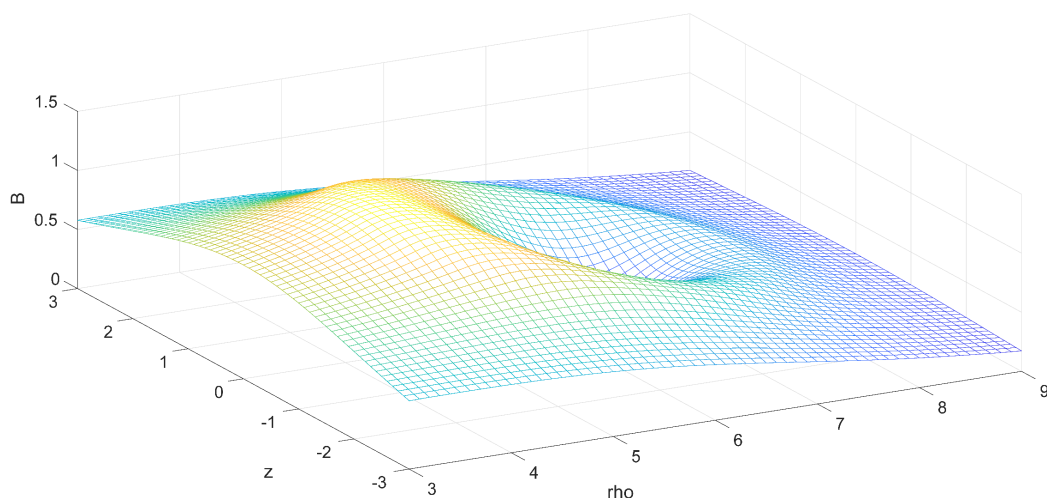


图 4.6 ITER 极向场分布

对于圆截面直导线的磁场分布满足

$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \quad (r < R) \quad (4.3.9)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R) \quad (4.3.10)$$

其分布图 (4.7) 所示

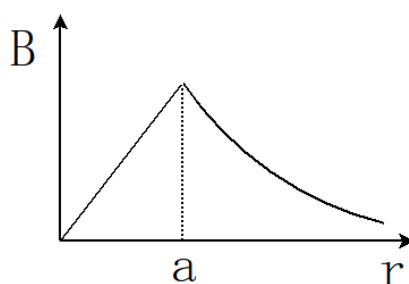


图 4.7 无限长圆截面直导线的磁场分布

如果扩展到三维，磁场分布相当于将图 (4.7) 的曲线绕纵轴旋转一周。不难想象，将圆截面直导线弯成一个环后，磁场大体分布还是会差不多，但又会存在一些差别。首先，由于磁力线发生重新分布，在 $\rho = R_0$ 两端磁场分布不会对称，具体表现为在距 R_0 相同的位置时，左边的磁场会更强，因为将直导线弯成一个环后，在 R_0 左边磁力线会变得密集，而 R_0 右边磁力线会变得稀疏。其次，同样由于磁力线发生重新分布，在 $\rho = R_0$ 处，磁感应强度将不会为零，并且磁场最小值不会在 R_0 处达到，而应该出现 R_0 右

侧（距 R_0 相同位置左边磁场始终比右边大）。具体分布如图（4.3）-（4.6）所示，当电流均匀时，圆截面直导线磁场在 $r < a$ 处是一条直线，而在 $r > a$ 处是双曲线，即磁场在 $r = a$ 处不可导，扩展到环形粗电流环就是在环边缘处，磁场不是平滑过渡的；当电流变得非均匀时，磁场在边缘分布变得平滑，这也不难解释，还是按照圆截面直导线磁场分布的思路，当电流非均匀时，在 $r < a$ 的地方，磁场分布将不是一条直线，而是一条抛物线，经过严格的计算可以发现磁场在 $r = a$ 处可导，扩展到环形粗电流环就是在环的边缘处，磁场是平滑过渡的。

5 近似托卡马克磁场位形分析

5.1 近似托卡马克磁场位形

托卡马克中的磁体系统十分复杂，除了用来约束和维持等离子体位形的磁体外，在其他辅助系统中也存在大量的磁体，比如微波波源、速调管系统等。在本论文的工作中，不考虑这些辅助系统中的磁体，仅仅考虑用来约束等离子体的磁体。约束和维持等离子体位形的磁场主要有环向场、极向场和矫正场，极向场包括了加热场和平衡场(成形场)，矫正场包括了垂直场、水平场和局部矫正场。作为近似，只考虑了环向场和由等离子体电流产生的极向场。

托卡马克装置由于极向场的存在，磁力线是呈螺线形结构，引入安全因子来描述磁力线倾斜的程度。对于圆截面等离子体位形，安全因子可以写为

$$q = \frac{r}{R_0} \frac{B_t}{B_p} \quad (5.1.1)$$

它代表磁力线在小环上绕一周后在大环上所环绕的圈数，它可以说明托卡马克中磁场偏向环向磁场的程度， q 越小，磁场越偏向极向场，就能够用越弱的磁场约束住越强的等离子体电流。安全因子 q 可以取各种实数值，当 q 为有理数时，表示磁力线经过有限圈数后能回到原点，当 q 为无理数时，表示磁力线经过有限圈后回不到出发点。在等离子体表面，安全因子应保持在 $2 \sim 3$ 以上，当等离子体表面的安全因子进一步下降时，会引发磁流体不稳定性发展甚至影响放电。 B_t 是 ρ 的函数， B_p 是 ρ, z 的函数，所以 q 可以看成是 ρ, z 的函数，用“Safety_Factor.m”来模拟托卡马克中安全因子的分布，结果如图 (5.1) 和图 (5.2) 所示。

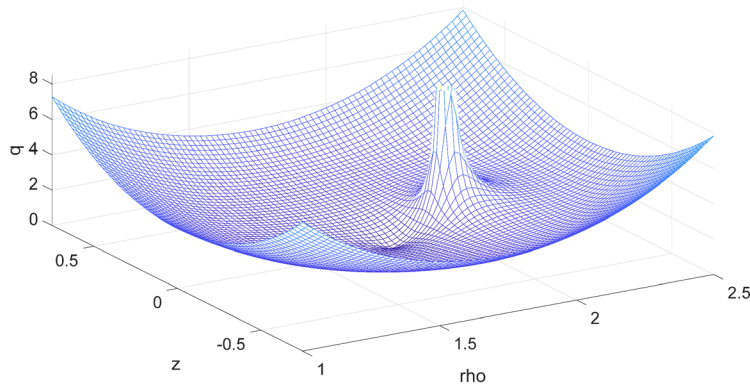


图 5.1 HL-2M 安全因子分布

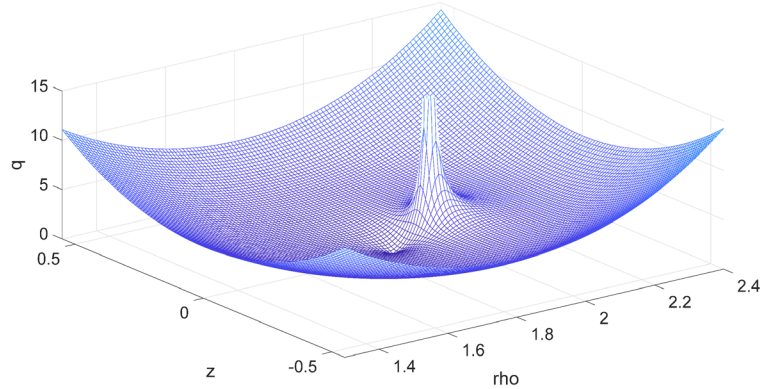


图 5.2 EAST 安全因子分布

式 (5.1.1) 中的 r 可写为 $\sqrt{(\rho - R_0)^2 + z^2}$, 由于极向场在偏离 R_0 处非常小, 而环向场与极向场相差非常大, 所以在偏离 $\rho = R_0$ 处安全因子非常大。这在物理上也容易解释, 因为在极向磁场最小处, 环向磁场占主导, 磁力线几乎没有螺旋结构, 即磁力线几乎不绕小环, 所以可以看成是磁力线在绕小环一圈时绕了大环很多圈, 故在偏离 R_0 处安全因子非常大, 而在 $\rho = R_0$ 处, 极向场不为零, 所以在 $\rho = R_0$ 处, 安全因子趋于零。

5.2 带电粒子在托卡马克装置中的运动

托卡马克装置有足够强的环向磁场, 极向磁场与环向磁场通常相差一个数量级, 约束粒子的运动一般遵守磁矩守恒, 由于托卡马克装置的环向磁场具有跟 R 成反比的关系, 即内强外弱, 当粒子从较外的区域向内部运动时, 类似磁镜装置, 在强场区可能会被反弹回来, 这类粒子不能够达到环内侧, 称为捕获粒子; 还有另外一类粒子, 能够通过强场区而不被反弹, 继续环绕小环和大环在同一个方向运动, 这类粒子称为通行粒子。捕获粒子的导向中心运动轨迹在小截面上的投影很像香蕉, 也被称为香蕉粒子。

由于龙格-库塔法的能量守恒并不好, 在模拟带电粒子在托卡马克中装置的运动时采用的是 Boris 方法, 这种方法在上个世纪七十年代被发明出来以后, 由于长时间的稳定性, 已经成为了带电粒子在电磁场中运动的标准算法^[31]。将公式 (3.3.1) 按照下面的格式进行离散化

$$\frac{\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}^n + \frac{\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \times \mathbf{B}^n \right) \quad (5.2.1)$$

\mathbf{v} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 都是向量, 对 $\mathbf{v}^{n+1/2}$ 和 $\mathbf{v}^{n-1/2}$ 做如下变换

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{v}^+ + \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m} \\ \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} &= \mathbf{v}^- - \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

将上面两个式子带入到公式 (5.2.1) 中, 可以将电场消掉

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m} (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B}^n \quad (5.2.3)$$

将 \mathbf{v}^+ , \mathbf{v}^- 移到等式两边

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \frac{2}{1 + |\mathbf{T}|^2} (\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{T}) \times \mathbf{T} \quad (5.2.4)$$

其中 $\mathbf{T} = \frac{q\Delta t \mathbf{B}^n}{2m}$, Boris 算法的可分为下面几个步骤来更新粒子的速度和位置信息

- (1) $\mathbf{v}^- = \mathbf{v}^{n-1/2} + \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m}$
- (2) $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{T}$
- (3) $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^0 \times \mathbf{S}$, $\mathbf{S} = \frac{2\mathbf{T}}{1+|\mathbf{T}|^2}$
- (4) $\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m}$
- (5) $\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \mathbf{v}^{n+1/2} \Delta t$

首先, 给定一个初速度 \mathbf{v}^0 , 不考虑电场存在的情况, 则 $\mathbf{v}^{1/2} = \mathbf{v}^0$, 然后按照步骤 (1) - (5) 进行迭代。利用 “Orbit_Boris.m” 模拟带电粒子在托卡马克装置中的运动。当氢离子初始位置为 (0,2.2,0.2), 初始速度为 $(\sqrt{3}/2 \times 10^7, 0.5 \times 10^7, 0)$ 时, 得到的捕获粒子轨道如图 (5.3) 所示, 在小截面的投影如图 (5.4) 所示

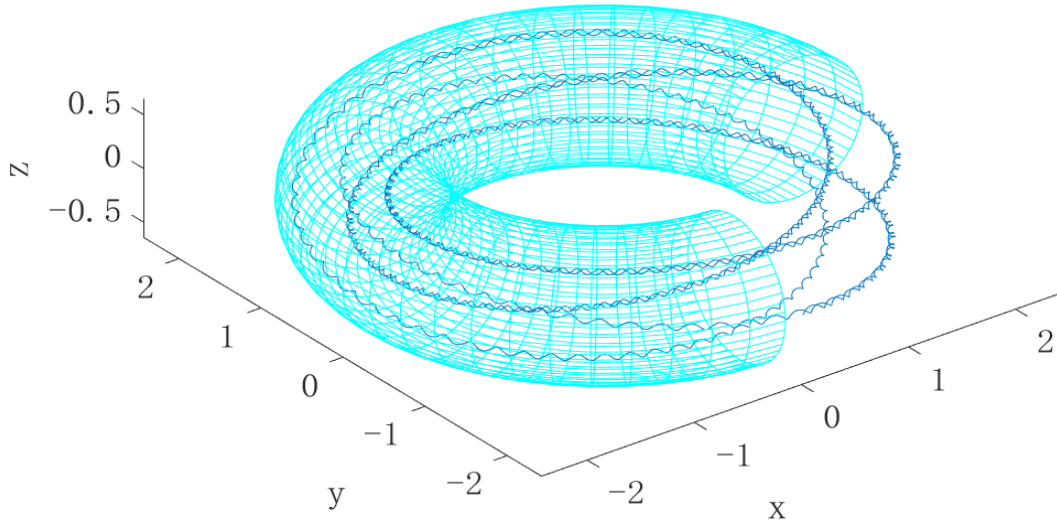


图 5.3 HL-2M 通行粒子轨迹

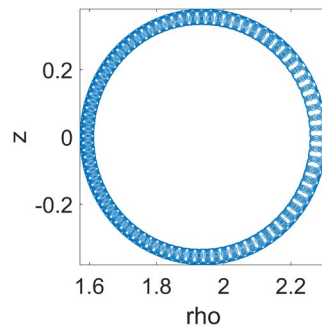


图 5.4 HL-2M 通行粒子极向投影

当氢离子初始为 $(0, 2.2, 0.2)$ ，初始速度为 $(0, \sqrt{3}/2 \times 10^2, 0)$ 时，得到的香蕉粒子轨迹如图 (5.5) 所示，极向投影如图 (5.6) 所示

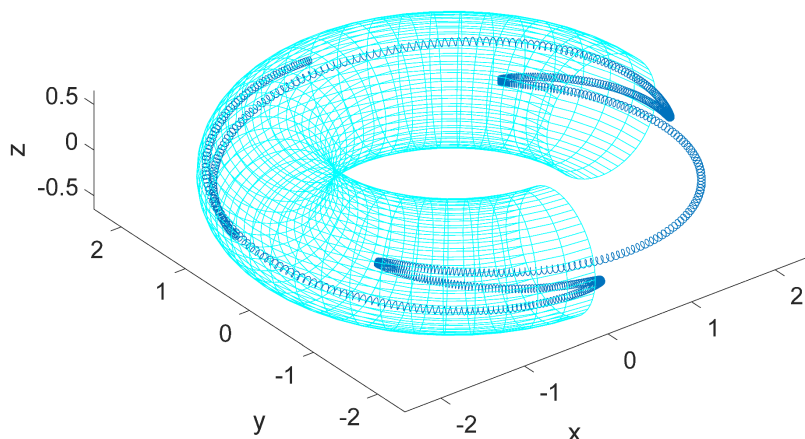


图 5.5 HL-2M 香蕉粒子轨迹

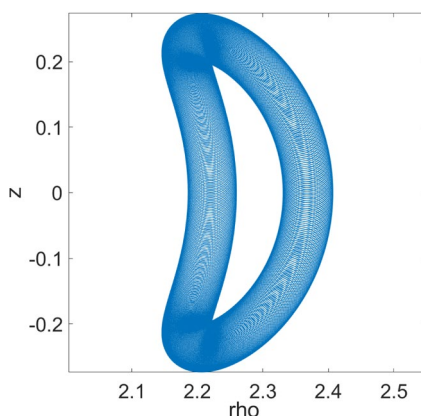


图 5.6 HL-2M 香蕉粒子极向投影

在图（5.3）中，氢离子在绕着磁力线做螺旋运动，在绕大环 4 周后回到初始位置，这对应安全因子为 4 的情况，实际上，由于氢离子在托卡马克装置中运动，达不到这么大的能量，因此回旋半径将不会又这么大，对于电子来说，由于其质量约为质子的千分之一，所以电子的回旋半径约为氢离子的千分之一，即电子绕磁力线会更紧。图（5.5）是托卡马克中的香蕉粒子，由于托卡马克装置环向场存在内强外弱的特点，且极向场比环向场小接近一个数量级，因此托卡马克的这种特征可以看成是一个磁镜结构，近似的认为粒子在托卡马克装置中运动时磁矩守恒，当粒子从环外侧向环内侧运动时，平行于

磁场方向的速度将会变为零，因此粒子不能到达环内侧，只能在环外侧和反射点之间往返运动。而对于图（5.3）中的粒子，能够通过强场区而不被反弹。

结 论

在本文的工作中，主要是进行计算磁场在空间中的分布和数值模拟。在严格计算了单电流环产生的磁感应分布后，拓展到磁镜和粗电流环的磁场位形。利用 `matlab` 进行可视化处理。本文还对磁镜和托卡马克装置中粒子运动进行了模拟，在磁镜中采用的龙格-库塔法，而在托卡马克装置中采用的能够长时间运行的 `Brois` 方法，模拟了不同位置和不同速度下的氢离子在两种装置中运动轨迹，与理论和实验的结果基本保持一致，证实了模拟的准确性。

对于本文的工作中，还可以做进一步的优化

(1) 对于离子在磁镜场中运动，可以采用能量守恒比较好的 `Brois` 方法，只需要把相关地方改为计算磁镜中的磁场分布即可。

(2) 尽管本文的程序已经很快了，还是可以做进一步的优化，想办法把程序里面的东西尽可能用矩阵替代，利用 `GPU` 和多核进行加速运算。

(3) 在模拟托卡马克装置中粒子轨迹时，需要花很长时间，主要是安全因子不能很好用一个表达式来代替，如果能够比较准确的拟合安全因子的话，计算速度能提升成百上千倍。

参 考 文 献

- [1] F. F. CHEN. 等离子体物理学导论[M]. 北京:科学出版社, 3, 2016.
- [2]. 郭海军. 介质谐振器法等离子体检测技术研究[D]. 四川:电子科技大学, 2016.
- [3] 李振乾. 托卡马克中径向电场的数值模拟研究[D]. 浙江:浙江大学, 2018.
- [4] 陈宝同. 低温等离子体聚合热敏高分子涂层研究[D]. 上海:东华大学, 2011.
- [5] 孟月东, 钟少锋, 熊新阳. 低温等离子体技术应用研究进展[C]//中国塑料加工工业协会专家委员会成立大会暨 2005 年塑料新材料、新技术国际研讨会论文集. 浙江宁波:中国塑料加工工业协会, 2005:136-145.
- [6] 任兆杏, 丁振峰. 低温等离子体技术[J]. 自然杂志, 1996(4):201-207.
- [7] 戴忠玲, 毛明, 王友年. 等离子体物理学-等离子体刻蚀工艺的物理基础[J]. 中国学术期刊文摘, 2007, 013(003):7.
- [8] 王龙. 磁约束等离子体实验物理[M]. 北京:科学出版社, 2, 2018.
- [9] LAO L, JOHN H S, STAMBAUGH R, et al. Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks[J]. Nuclear fusion, 1985, 25(11):1611.
- [10] 阮剑华. 电力荷载下 ht-7u 超导托卡马克磁体系统研究[D]. 安徽:中国科学技术大学, 2003.
- [11] 李建刚. 托卡马克研究的现状及发展[J]. 物理, 2016(2):88-97.
- [12] Fisch, Nathaniel J. Confining a Tokamak Plasma with rf-Driven Currents[J]. Physical Review Letters, 1978, 41(13):873-876.
- [13] Artsimovich L A. Tokamak devices[J]. Nuclear Fusion, 1972, 12(2):215.
- [14] 邱银, 李广生, 单亚农, 等. HL-2M 装置环向场线圈导体材料的选择和制造[J]. 核聚变与等离子体物理, 2017, 37(01):43-47.
- [15] Gribov Y, Humphreys D, Kajiwara K, et al. Plasma operation and control[J]. Nuclear fusion, 2007, 47(6):385.
- [16] 张德丰. Matlab 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社, 6, 2016.
- [17] 时海亮, 汪远征. 关于非计算机专业“计算机编程”课程设置的一些思考[J]. 电子设计工程, 2014, 22(8):15-17, 20.
- [18] 刘保义, 张明霞. 圆环电流在全空间形成的磁感应强度分布[J]. 天水师范学院学报, 2009, 29(2):65-66.
- [19] WOOTTON A. Magnetic fields and magnetic diagnostics for tokamak plasmas[EB]. October 3, 2013.
- [20] 刘金远, 段萍, 颀鹏. 计算物理学[M]. 北京:科学出版社, 2012.
- [21] 谢华生. 计算等离子体导论[M]. 北京:科学出版社, 1, 2018.
- [22] Bagryansky P A, Anikeev A V, Denisov G G, et al. Overview of ECR plasma heating experiment in the GDT magnetic mirror[J]. Nuclear Fusion, 2015, 55(5):053009.

- [23] 全军. 带电粒子在磁镜中的重力漂移运动模拟研究[J]. 大学物理, 2018, 37(2):34-37.
- [24] 马怀君. 磁镜原理简介[J]. 大学物理, 1989(07):31-34.
- [25] 姚若河, 吴为敬, 张晓东, 等. 磁镜场约束中粒子运动的数值计算[J]. 真空科学与技术学报, 2004, 24(2):105-108.
- [26] 韩永胜, 杨宏新. 带电粒子在磁镜中运动的模拟[J]. 大学物理, 2014, 33(3):35-40.
- [27] FREIDBERG J. 等离子体物理与聚变能[M]. 北京:科学出版社, 2010.
- [28] Bagryansky P A, Shalashov A G, Gospodchikov E D, et al. Threefold increase of the bulk electron temperature of plasma discharges in a magnetic mirror device[J]. Physical review letters, 2015, 114(20):205001.
- [29] 罗正平. 托卡马克中等离子体平衡计算[D]. 安徽:合肥工业大学, 2007.
- [30] Woods L C. Theory of tokamak transport: new aspects for nuclear fusion reactor design[M]. Frankfurt am Main:Wiley-VCH, February 10, 2006.
- [31] Toggweiler M. An adaptive time integration method for more efficient simulation of particle accelerators[D]. Zurich:ETH Zurich, 2011.

附录 A 程序

```

"Single_Coil_3D.m"
tic;clear;clc;
%I:电流(A),c0=u0/2pi,R:线圈半径(m),dl:步长
I=1e6;c0=2e-7;R=0.5;dl=0.001;x=[];y=[];z=[];
r=[0.1;0.15;0.2;0.25;0.3;0.35;0.4;0.45];
%用这么多点画磁力线的一半
n=[510;525;545;600;800;880;500;220];
for theta=0:30:360 %在不同 theta 角画磁力线
    for j=1:length(r) %在某个角度下,磁力线条数
        x(1)=r(j)*cos(theta*pi/180);y(1)=r(j)*sin(theta*pi/180);z(1)=0; %磁
        力线的起点
        for pm=[-1,1] %磁力线是对称的,先画上半部分,在画下半部分
            for i=1:n(j)
                [Bx,By,Bz]=magnetic(c0,R,I,x(i),y(i),z(i));
                B=sqrt(Bx^2+By^2+Bz^2);
                x(i+1)=x(i)+dl*Bx/B*pm;
                y(i+1)=y(i)+dl*By/B*pm;
                z(i+1)=z(i)+dl*Bz/B*pm;
            end
            plot3(x,y,z);hold on;box on;
        end
        x=[];y=[];z=[];
    end
end
%画线圈
h=0;t=0:0.1:(2*pi);t=[t,0];
plot3(0+0.5*sin(t),0+0.5*cos(t),h*ones(size(t)),'LineWidth',4)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');set(gca,'FontSize',20);
disp(['计算时间' num2str(toc) 's']);
%写入到文件

```

```

time=datestr(now,30);
print(gcf,['Single_Coil_3D_',time,'.eps'],'-depsc','-r600')
savefig(['Single_Coil_3D_',time,'.fig'])
print(gcf,['Single_Coil_3D_',time,'.png'],'-dpng')
disp(['耗时' num2str(toc) 's']);
    "Single_Coil_2D.m"
    tic;clc;clear;
%x-z 平面磁力线分布, 当 y=0, \rho=x>0;Bx=B\rho
%c0=u0/2pi, I:线圈电流(A), R:线圈半径(m)
c0=2e-7;I=1e6;R=0.5;
[x,z]=meshgrid(0:0.01:1.0); %网格划分
k2=4*R*x./((R+x).^2+z.^2);k2=k2-eps*(k2==1);
[K,E]=ellipke(k2);
dd=(R-x).^2+z.^2;dd=dd+eps*(dd==1); %防止分母为零
Bx=c0*I*z./(x+eps*(x==0))./sqrt((R+x).^2+z.^2).*((R^2+x.^2+z.^2)./dd.*E-K);
Bz=c0*I*1./sqrt((R+x).^2+z.^2).*((R^2-x.^2-z.^2)./dd.*E+K);
px=[0:R/50:R];
pz=zeros(1,length(px)); %磁力线起点
streamline(x,z,Bx,Bz,px,pz);hold on;
streamline(-x,z,-Bx,Bz,-px,pz)
streamline(x,-z,Bx,-Bz,px,-pz)
streamline(-x,-z,-Bx,-Bz,-px,-pz)
hold on;xlabel('y');ylabel('z');set(gca,'FontSize',20);
plot([-R R],[0 0],'r','markersize',20);
disp(['计算时间' num2str(toc) 's']);
%写入到文件
time=datestr(now,30);
print(gcf,['Single_Coil_2D_',time,'.eps'],'-depsc','-r600')
savefig(['Single_Coil_2D_',time,'.fig'])
print(gcf,['Single_Coil_2D_',time,'.png'],'-dpng')
disp(['耗时' num2str(toc) 's']);
    "Simple_Mirror_3D.m"

```

```

tic;clc;clear;
%c0:u0/2pi, I:线圈电流(A), R:线圈半径(m), L:线圈间距(m), dl:步长
c0=2e-7; I=1e6; L=2.0; R=0.2; dl=0.001;
x=[]; y=[]; z=[];
r=[0.01;0.02;0.05;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5]; r=[-r;r];
for theta=0:30:180
    for j=1:length(r)
        for pm=-1:1
            for i=1:600
                %磁力线起点
                x(1)=r(j)*cos(theta*pi/180); y(1)=r(j)*sin(theta*pi/180); z(1)=0;
                [Bx1, By1, Bz1]=magnetic(c0, R, I, x(i), y(i), z(i)+L/2);
                [Bx2, By2, Bz2]=magnetic(c0, R, I, x(i), y(i), z(i)-L/2);
                Bx=Bx1+Bx2; By=By1+By2; Bz=Bz1+Bz2;
                B=Bx^2+By^2+Bz^2;
                x(i+1)=x(i)+Bx/B*dl*pm;
                y(i+1)=y(i)+By/B*dl*pm;
                z(i+1)=z(i)+Bz/B*dl*pm;
            end
            subplot(121); plot3(x, y, z, 'b-'); hold on; box on;
            if theta==0;
                subplot(122); plot(x, z, 'b-'); hold on;
            end
        end
    end
end
end
%画线圈1
h=-1; t=0:0.1:(2*pi); t=[t, 0];
plot3(0+0.2*sin(t), 0+0.2*cos(t), h*ones(size(t)), 'LineWidth', 4)
%画线圈2
h=1; t=0:0.1:(2*pi); t=[t, 0];
plot3(0+0.2*sin(t), 0+0.2*cos(t), h*ones(size(t)), 'LineWidth', 4)

```

```

xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');set(gca,'FontSize',20);
subplot(122);xlabel('x');ylabel('z');set(gca,'FontSize',20);
disp([' 计算时间' num2str(toc) 's']);
%写入到文件
time=datestr(now,30);
print(gcf,[' Simple_Mirror_3D_',time,'.eps'],'-depsc','-r600')
savefig([' Simple_Mirror_3D_',time,'.fig'])
print(gcf,[' Simple_Mirror_3D_',time,'.png'],'-dpng')
disp([' 耗时' num2str(toc) 's']);
    "Simple_Mirror_2D.m"
    tic;clc;clear;
%c0:u0/2pi, I:线圈电流(A), l:线圈距离(m), R:线圈半径(m)
c0=2e-7;I=1e6;l=2;R=1.0;
n=100; x1=0;x2=6*R;z1=-1.0; z2=1.0;
dx = (x2-x1)/n; dz = 2*(z2-z1)/n;
[x,z]=meshgrid(x1:dx:x2, 3*z1:dz:3*z2);
k2_1=4*R*x./((R+x).^2+(z+l/2).^2);
k2_1=k2_1-eps*(k2_1==1);
k2_2=4*R*x./((R+x).^2+(z-l/2).^2);
k2_2=k2_2-eps*(k2_2==1);
[K1,E1]= ellipke(k2_1);
[K2,E2]=ellipke(k2_2);
dd1=(R-x).^2+(z+l/2).^2;
dd1=dd1+eps*(dd1==0);
dd2=(R-x).^2+(z-l/2).^2;
dd2=dd2+eps*(dd2==0);
%线圈 2 产生的磁场
Bx1=c0*I*(z+l/2)./(x+eps*(x==0))./sqrt((R+x).^2+(z+l/2).^2).*((R^2+x.^2...
+(z+l/2).^2)./dd1.*E1-K1);
Bz1=c0*I./sqrt((R+x).^2+(z+l/2).^2).*((R^2-x.^2-(z+l/2).^2)./dd1.*E1+K1);
%线圈 1 产生的磁场
Bx2=c0*I*(z-l/2)./(x+eps*(x==0))./sqrt((R+x).^2+(z-l/2).^2).*((R^2+x.^2...

```

```

(z-L/2).^2)./dd2.*E2-K2);
Bz2=c0*I./sqrt((R+x).^2+(z-L/2).^2).*((R^2-x.^2-(z-L/2).^2)./dd2.*E2+K2);
Bx=Bx1+Bx2;
Bz=Bz1+Bz2;
vz =[0, 1]; vx=[0:0.2:4*R];
[px, pz]=meshgrid(vx, vz);
streamline(x, z, Bx, Bz, px, pz);hold on;
streamline(x, -z, Bx, -Bz, px, -pz);
streamline(-x, z, -Bx, Bz, -px, pz);
streamline(-x, -z, -Bx, -Bz, -px, -pz);
plot([-R -R R R], [z1 z2 z1 z2], 'r.', 'markersize', 40);
plot([0 0], [3*z1 3*z2], 'b-', 'linewidth', 1);
xlabel('x');ylabel('z');set(gca, 'FontSize', 20);
disp(['计算时间' num2str(toc) 's']);
%写入到文件
time=datestr(now, 30);
print(gcf, ['Simple_Mirror_2D_', time, '.eps'], '-depsc', '-r600')
savefig(['Simple_Mirror_2D_', time, '.fig'])
print(gcf, ['Simple_Mirror_2D_', time, '.png'], '-dpng')
disp(['耗时' num2str(toc) 's']);
Coarse_Coils.m
tic;clc;clear;
global rho z c0 R0 a Ip
c0=2e-7;
%choice=1, EAST, choice=2, ITER, choice=3, HL-2M x1-->rho , x2--> z
choice=3;
switch choice
case 1
a=0.45;R0=1.85;Ip=1e6;
x1=[1:0.02:2.6];x2=linspace(-1, 1, length(x1));
case 2
a=2.0;R0=6.2;Ip=15e6;

```

```

        x1=[3:0.1:9];x2=linspace(-3,3,length(x1));
    case 3
        a=0.65;R0=1.78;Ip=3e6;
        x1=[0.8:0.02:2.6];x2=linspace(-1,1,length(x1));
    end
    for i1=1:length(x1)
        for i2=1:length(x2)
            z=x2(i2);
            rho=x1(i1);
            Brho=integral2(@whatBrho,0,a,0,2*pi);
            Bz=integral2(@whatBz,0,a,0,2*pi);
            B(i1,i2)=sqrt(Brho^2+Bz^2);
        end
    end
    end
    mesh(x1,x2,B');
    axis tight;xlabel('rho');ylabel('z');zlabel('B');
    set(gca,'FontSize',20);          %set axis size
    disp([' calculation time ' num2str(toc) ' s']);
    %savefiles(choice);
    disp([' total time ' num2str(toc) ' s']);

function B_rho=whatBrho(r,theta)
global c0 z rho
[A1,~,A3,dd,J,E,K]=parameter(r,theta);
B_rho=c0*J.*r.*(z-r.*sin(theta)).*(A1./A3.*E-K)./(rho*dd);
end

function B_z=whatBz(r,theta)
global c0
[~,A2,A3,dd,J,E,K]=parameter(r,theta);
B_z=c0*J.*r.*(A2./A3.*E+K)./dd;
end

function [A1,A2,A3,dd,J,E,K]=parameter(r,theta)

```



```

% theta 为截面的, 不是柱坐标下的 theta, r 也不是柱坐标下的 r
global rho z a R0 Ip
J=Ip/pi/a^2;           %电流均匀
J=J*(1-r.^2./a^2);    %电流不均匀
%修改后的 R, Z, 圆截面
R=R0+r.*cos(theta);
Z=z-r.*sin(theta);
k2=4*R*rho./((R+rho).^2+Z.^2);
k2=k2-eps;
[K, E]=ellipke(k2);
dd=sqrt((R+rho).^2+Z.^2);
A1=R.^2+rho^2+Z.^2;
A2=R.^2-rho^2-Z.^2;
A3=(R-rho).^2+Z.^2;
A3=A3+1e-3;          %避免分母出现零
end
function savefiles(choice)
time=datestr(now, 30);
switch choice
    case 1
        print(gcf, ['Coarse_Coils_EAST_', time, '.eps'], '-depsc', '-r600')
        savefig(['Coarse_Coils_EAST_', time, '.fig'])
        print(gcf, ['Coarse_Coils_EAST_', time, '.png'], '-dpng')
    case 2
        print(gcf, ['Coarse_Coils_ITER_', time, '.eps'], '-depsc', '-r600')
        savefig(['Coarse_Coils_ITER_', tme, '.fig'])
        print(gcf, ['Coarse_Coils_ITER_', time, '.png'], '-dpng')
    case 3
        print(gcf, ['Coarse_Coils_HL_2M_', time, '.eps'], '-depsc', '-r600')
        savefig(['Coarse_Coils_HL_2M_', time, '.fig'])
        print(gcf, ['Coarse_Coils_HL_2M_', time, '.png'], '-dpng')

```

```

end
end
Safety_Factor.m
    tic;clear;clc;
c0=2e-7;choice=3;
%choice=1, EAST, choice=2, ITER, choice=3, HL-2M x1--->rho, x2--> z
switch choice
    case 1
        B0=3.5;R0=1.85;a=0.45;Ip=1e6;
        x1=[1.3:0.01:2.4];x2=linspace(-0.55,0.55,length(x1));
    case 2
        B0=5.3;R0=6.2;a=2.0;Ip=15e6;
        x1=[4:0.05:8.4];x2=linspace(-2.2,2.2,length(x1));
    case 3
        B0=3;R0=1.78;a=0.65;Ip=3e6;
        x1=[1.0:0.02:2.5];x2=linspace(-0.75,0.75,length(x1));
end
for i1=1:length(x1)
    for i2=1:length(x2)
        rho=x1(i1);z=x2(i2);
        [Bt,Bp]=Field(rho,z,choice);
        r=sqrt((rho-R0)^2+z^2);
        r=r+eps;
        q(i1,i2)=r/R0*Bt/Bp;
    end
end
end
mesh(x1,x2,q');
xlabel('rho');ylabel('z');zlabel('q');
axis tight;set(gca,'FontSize',20);
%zlim([0,8]);set(gca,'xminor tick','on')%设置 x 轴最小刻度
toc
function [Bt,Bp]=Field(rho,z,choice)

```

```

%Bt, Bp 与柱坐标的 theta 无关, 可随意设置
theta=pi/2;
x=rho*cos(theta);y=rho*sin(theta);
[Bx, By, Bz]=Tokamak_Magnetic(x, y, z, choice);
Btheta=By*cos(theta)-Bx*sin(theta);
Bt=Btheta;
Brho=Bx*cos(theta)+By*sin(theta);
Bp=sqrt(Brho^2+Bz^2);
end
"Tokamak_Magnetic.m"
function [Bx, By, Bz]=Tokamak_Magnetic(x, y, z, choice)
% 圆截面托卡马克装置, 给定某个位置, 返回磁场在三个方向的分量
% choice=1:EAST, 2:ITER, 3:HL-2M
c0=2e-7;
switch choice
    case 1
        Ip=1e6;R0=1.85;a=0.45;B0=3.5;
    case 2
        Ip=15e6;R0=6.2;a=2.0;B0=5.3;
    case 3
        Ip=3e6;a=0.65;R0=1.78;B0=3.0;
end
rho=sqrt(x^2+y^2);
theta=atan2(y, x);
j=Ip/pi/a^2;
J=@(r, phi) j;          %电流均匀
J=@(r, phi) J(r, phi)*(1-r.^2./a^2); %电流非均匀
R=@(r, phi) R0+r.*cos(phi);
Z=@(r, phi) z-r.*sin(phi);
k2=@(r, phi) 4*R(r, phi).*rho./((R(r, phi)+rho).^2+Z(r, phi).^2);
k2=@(r, phi) k2(r, phi)-eps;
K=@(r, phi) KK(k2(r, phi));

```

```

E=@(r, phi)EE(k2(r, phi));
dd=@(r, phi) sqrt((R(r, phi)+rho).^2+Z(r, phi).^2);
A1=@(r, phi)R(r, phi).^2+rho^2+Z(r, phi).^2;
A2=@(r, phi)R(r, phi).^2-rho^2-Z(r, phi).^2;
A3_0=@(r, phi) (R(r, phi)-rho).^2+Z(r, phi).^2;
A3=@(r, phi)A3_0(r, phi)+1e-3;          %if A3=0, c/0=inf

B_rho=@(r, phi) c0*J(r, phi). *r. *Z(r, phi). *(A1(r, phi). /A3(r, phi). *E(r, phi)-...
K(r, phi)). /((rho+eps*(rho==0)). *dd(r, phi));
B_theta=B0*R0/rho;
B_z=@(r, phi) c0*J(r, phi). *r. *(A2(r, phi). /A3(r, phi). *E(r, phi)+...
K(r, phi)). /dd(r, phi);
Brho=integral2(B_rho, 0, a, 0, 2*pi);
Btheta=B_theta;
Bz=integral2(B_z, 0, a, 0, 2*pi);
Bx=Brho*cos(theta)-Btheta*sin(theta);
By=Brho*sin(theta)+Btheta*cos(theta);
end
function K=KK(k2)
    [K, ~]=ellipke(k2);
end function E=EE(k2)
    [~, E]=ellipke(k2);
end
"Orbit_Boris.m"
tic;clc;clear
%初始化
dt=1e-10;n=100000;
q=1.6e-19;m=1.6726231e-27; %氢离子
v0=[0.5e7 0 sqrt(2)/2*1e7];%初始速度
r0=[0 2.2 0.1];          %初始位置
r(1,:)=r0;x=r(1,1);y=r(1,2);z=r(1,3);
v(1,:)=v0;

```

```

for i=1:n
    v_minus=v(i,:);
%重新设置一下磁场即可模拟带电粒子在此磁镜场中的运动
    [Bx,By,Bz]=Tokamak_Magnetic(r(i,1),r(i,2),r(i,3),3); %HL-2M
    %[Bx,By,Bz]=Tokamak_Magnetic_S(r(i,1),r(i,2),r(i,3));
    B=[Bx By Bz];
    T=0.5*q*dt./m*B;
    S=2/(1+norm(T)^2)*T;
    v_zero=v_minus+cross(v_minus,T);
    v_plus=v_minus+cross(v_zero,S);
    v(i+1,:)=v_plus;
    r(i+1,:)=r(i,:)+v(i+1,:)*dt;
    p(i)=i;
end
figure(1)
plot3(r(:,1),r(:,2),r(:,3));hold on;
R0=1.78;a=0.65;
Plot_Plasma_Shape(R0,a)
time=datestr(now,30);
savefig([num2str(r0),num2str(v0),'_',time,'_','.fig']);
figure(2);R0=1.78;b=sqrt(r(:,1).^2+r(:,2).^2)-R0;
plot(b,r(:,3));
savefig([num2str(r0),num2str(v0),'_',time,'_r_z_','.fig']);
axis tight
toc
function Plot_Plasma_Shape(R0,a)
[u,v]=meshgrid(0:2*pi/50:2*pi,0:2*pi/50:1.5*pi);
X=(R0+a.*cos(u)).*cos(v); Y=(R0+a.*cos(u)).*sin(v);
Z=a*sin(u); mesh(X,Y,Z);axis equal;hidden off;colormap([0 1 1]);
end

```

修改记录

(1) 毕业论文题目修改

第一次修改记录:

原题目: 托卡马克装置的近似磁场位形的数值研究

修稿后题目: 托卡马克装置的近似磁场位形的数值研究

(2) 指导教师变更

无

(3) 校外毕业论文时间节点记录

无

(4) 毕业论文内容重要修改记录

第二次修改记录:

修改前: 对模拟得到的结果缺少分析

修改后: 增加了模拟所得到结果的分析

(5) 毕业论文外文翻译修改记录

无

(6) 毕业设计(论文)正式检测重复比

2.1%

记录人(签字):

指导教师(签字):

致 谢

转眼本科四年的生活即将结束，回首这四年的时光，不光学会了很多知识、收获了友谊还变得更加成熟。感谢四年来老师们的传道授业，感谢这四年来所有经历，使我能够更加自信坚定地面对今后的学业和生活。

在做毕设的这段时光，即充满了挑战又无比充实。毕设能够取得成功，首先需要感谢的是刘金远老师，刘老师作为我本科的导师，在学习和生活上都给我做过很多指导工作，使我很快的就度过了大一的迷茫期；作为计算物理学的老师，不光教会了知识，更是教会我学习的方法；作为毕设的导师，本论文从最初的选题到最后论文完成都是在刘老师的一步一步指导下完成的。其次，需要感谢的是王丰老师，王丰老师在论文的修改过程中给出了很多宝贵的意见。最后感谢同学们的关心、父母的支持以及大连理工大学提供正版 matlab 的支持。